

# Phương pháp phân tích phi tuyến kết cấu khung thép

## Nonlinear analysis method of steel frame structure

> TS HOÀNG HIẾU NGHĨA

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Hải Phòng; Email: [ngghiahh@dhhp.edu.vn](mailto:ngghiahh@dhhp.edu.vn)

### TÓM TẮT

Bài báo đã trình bày các phương pháp truyền thống khi thực hiện phân tích kết cấu thép hiện nay, đánh giá ưu, nhược điểm của từng phương pháp, đặt vấn đề và giải quyết vấn đề trong phân tích kết cấu khung thép có kể đến yếu tố phi tuyến. Tổng quan về các phương pháp phân tích phi tuyến kết cấu thép. Phân tích các phương pháp phân tích phi tuyến hiện nay, các phương pháp tính toán kết cấu khung có xuất hiện khớp dẻo đang được áp dụng trong các nghiên cứu và trong các tiêu chuẩn hiện hành và đề xuất phương pháp phân tích phi tuyến tổng thể của hệ kết cấu theo phương pháp phân tích tiên tiến.

**Từ khóa:** Phi tuyến; chảy dẻo; khớp dẻo; vùng dẻo; biến dạng dẻo lan truyền; mặt chảy dẻo; thiết kế dẻo.

### ABSTRACT

The paper presented traditional methods when performing current steel structure analysis, assessing the advantages and disadvantages of each method, questioning and solving problems in steel structure nonlinear analysis. Overview of nonlinear analysis methods for steel structures. Analysis of current nonlinear analysis methods, calculation methods of frame structure with plastic hinge are being applied in the studies and in the current standards and the proposed total nonlinear analysis method of the structural system according to advanced analytical methods.

**Keywords:** Nonlinear; yield; plastic hinge; plastic zone; spread of plasticity deformation; plastic surface, plastic design.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay khi phân tích và tính toán kết cấu thép thường sử dụng các phương pháp truyền thống sau (hình 1) [1], [2], [3]:

- Thiết kế theo ứng suất cho phép (ASD): việc tính toán ứng suất dựa trên đàn hồi bậc nhất, còn ảnh hưởng về phi tuyến hình học được ngầm xét trong các phương trình tính toán cấu kiện.

- Thiết kế dẻo (PD): Dùng phân tích khớp dẻo bậc nhất để phân tích kết cấu. Thiết kế dẻo có xét đến ảnh hưởng phân phối nội lực dẻo trên toàn hệ kết cấu, còn phi tuyến hình học và ảnh hưởng của sự chảy dẻo theo thời gian không được xét đến nên chúng được đưa vào trong các phương trình tính toán cấu kiện.

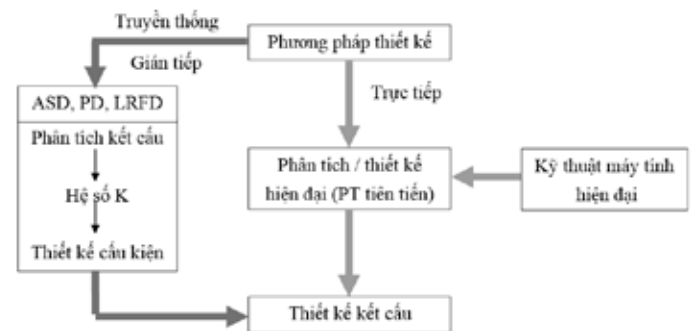
- Thiết kế theo hệ số tải trọng và sức kháng (LRFD): Dùng phân tích đàn hồi bậc nhất với các hệ số khuếch đại hay trực tiếp dùng phân tích đàn hồi bậc 2 để xét đến phi tuyến về mặt hình học, còn độ bền cục hạn của cấu kiện cột - dầm phản ánh gián tiếp qua các phương trình tương tác khi thiết kế cấu kiện.

Cả 3 phương pháp ASD, PD, LRFD đều yêu cầu phải kiểm tra riêng rẽ từng cấu kiện, nhất là phải tính đến hệ số K (hệ số chiều dài tính toán).

Theo phương pháp truyền thống (hình 1), thiết kế kết cấu bao gồm 2 bước:

Bước 1: Dùng phân tích đàn hồi tuyến tính và nguyên lý cộng tác dụng để xác định nội lực và chuyển vị của hệ kết cấu.

Bước 2: Kiểm tra khả năng chịu lực, ứng suất giới hạn, ổn định của từng cấu kiện riêng lẻ.



**Hình 1.** Phương pháp phân tích và thiết kế kết cấu

Phương pháp thiết kế truyền thống trên đã được áp dụng lâu đời và có ưu điểm là đơn giản hóa công việc thiết kế của người kỹ sư. Tuy nhiên nó không thể hiện rõ quan hệ phi tuyến giữa tải trọng và chuyển vị, không thể hiện rõ tính phi tuyến của vật liệu kết cấu, chưa xem xét đầy đủ ứng xử của toàn hệ kết cấu do đó nó dẫn đến việc lãng phí vật liệu. Nếu có xem xét thì mới chỉ dừng lại ở việc tính gián tiếp thông qua các công thức thiết kế hoặc các hệ số đơn giản nào đó được đề xuất trong các tiêu chuẩn [1], [2]. Trong thực tế khi hệ kết cấu chịu tải trọng, kết cấu có thể trải qua quá trình đàn hồi và chuyển sang giai đoạn chảy dẻo đáng kể mà chưa bị phá hủy hay mất ổn định cục bộ.

Do vậy ta cần phải nghiên cứu sâu hơn nữa trạng thái dẻo của cả hệ kết cấu hay phân tích phi tuyến vật liệu hệ kết cấu. Đó là hướng thiết kế hiện đại (phân tích tiên tiến) và chỉ thực hiện trong một bước thiết kế vì nó sẽ phản ánh chính xác sự làm việc thực tế của hệ kết cấu,

dự đoán chính xác dạng phá hủy dẻo và tải trọng giới hạn của kết cấu khung khi chịu tải trọng tĩnh và là một điều rất cần thiết để có thể đảm bảo độ tin cậy của đồ án thiết kế. Các nghiên cứu về vấn đề này điển hình như: Chan và Chui [4], White [5], Chen và Sohal [6], Chen, Kim và Choi [7], Yong cùng cộng sự [8], Orbison cùng cộng sự [9], Lieuw và Chen [12].

**2. PHÂN TÍCH PHI TUYẾN VÀ CÁC MỨC ĐỘ PHÂN TÍCH PHI TUYẾN**

**2.1. Phân tích phi tuyến**

Phân tích kết cấu là xác định chuyển vị, biến dạng và ứng suất của từng phần tử của hệ kết cấu dưới tác dụng của tải trọng nào đó. Trong phân tích đàn hồi tuyến tính vật liệu được giả thiết là không chảy dẻo và các tính chất của vật liệu không thay đổi, biến dạng tỷ lệ với lực tác dụng, đường biểu diễn quan hệ ứng suất biến dạng là đường thẳng, các phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên trường hợp cấu hình kết cấu chưa biến dạng dẻo. Các biến dạng được xem là nhỏ và không ảnh hưởng đáng kể đến sự cân bằng của hệ kết cấu. Phân tích này chưa xét đến sự thay đổi hình học, tích chất vật liệu và sự thay đổi hình dạng của kết cấu trong quá trình chịu tải. Người thiết kế thường bỏ sung các hệ số để xét đến các tác động trên cho nên chưa phản ánh đúng bản chất làm việc thực tế của kết cấu.

Bài toán phân tích tuyến tính thường đơn giản và không tốn nhiều công sức. Bài toán phân tích phi tuyến, quan hệ lực - biến dạng là đường cong, do đó phải giải lập vi kết cấu đã bị biến dạng với tải trọng trước đó và độ cứng kết cấu bị suy yếu dần, máy tính sẽ cập nhật dữ liệu hình học, tính chất vật liệu sau mỗi lần tải trọng thay đổi.

**2.2. Phi tuyến vật liệu**

Phân tích phi tuyến vật liệu là phân tích có kể đến ứng xử ngoài miền đàn hồi của vật liệu. Khi chịu tải trọng, vật liệu làm việc từ giai đoạn đàn hồi, bắt đầu chảy dẻo, đàn dẻo và chảy dẻo hoàn toàn. Khi bắt đầu chảy dẻo, các thớ bên ngoài sẽ chảy dẻo trước và sẽ lan truyền dần vào các thớ bên trong tiết diện. Với sự lan truyền của sự chảy dẻo, độ cứng dọc trục EA và độ cứng chống uốn EI tại các tiết diện của phần tử sẽ suy giảm dọc theo chiều dài phần tử. Hai phương pháp cơ bản được các nhà nghiên cứu sử dụng khi phân tích kết cấu phi tuyến là phương pháp khớp dẻo và phương pháp vùng dẻo (hình 2). Phương pháp khớp dẻo đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước ứng dụng để nghiên cứu phân tích kết cấu phi đàn hồi với nhiều hướng tiếp cận khác nhau, còn phương pháp vùng dẻo là phương pháp phân tích kết cấu phi đàn hồi cho kết quả sát với thực tế nhưng lại có rất ít tác giả nghiên cứu và áp dụng do tính phức tạp của nó. Một số công trình nghiên cứu về phi tuyến vật liệu như: Chan và Chui [4], White [5], Chen và Sohal [6], Chen, Kim và Choi [7], Yong cùng cộng sự [8], Orbison và Guire [9], Hoàng Hiếu Nghĩa [14].

Phương pháp khớp dẻo đơn giản	Phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh	Phương pháp vùng dẻo
hoàn toàn đàn hồi	hoàn toàn đàn hồi	hoàn toàn đàn hồi
Không chảy dẻo	Chảy dẻo một phần tại một mặt cắt	Vùng chảy dẻo một phần
Khớp dẻo	Khớp dẻo	Chiều dài vùng dẻo $l_n$ Vùng dẻo

Hình 2. Các phương pháp phân tích phi tuyến vật liệu

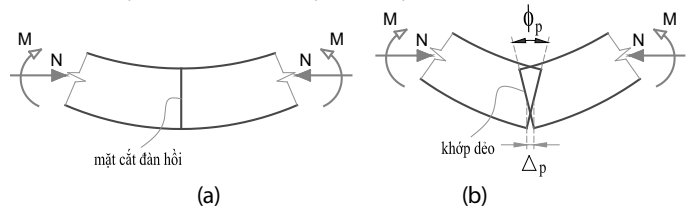
**2.3. Phương pháp khớp dẻo**

**2.3.1. Định nghĩa khớp dẻo**

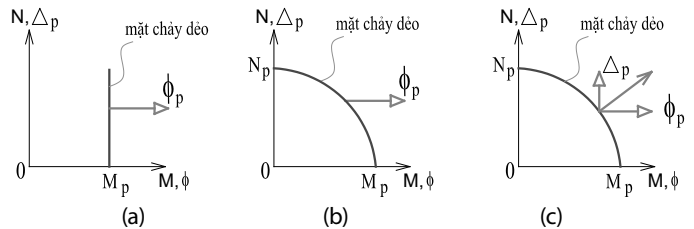
Để đơn giản trong cách phân tích mà vẫn phản ánh đúng sự làm việc thực tế của kết cấu khung đàn dẻo. Nhiều tác giả đã dùng phương pháp khớp dẻo điển hình như: Chan và Chui [4], White [5], Chen và Sohal [6], Chen, Kim và Choi [7], Yong cùng cộng sự [8], Orbison cùng cộng sự [9], Lieuw và Chen [12].

Phương pháp khớp dẻo là mô hình tính đơn giản hóa của mô hình thực với giả thiết chiều dài vùng dẻo  $l_n = 0$ , theo đó giả thiết trong quá trình chịu lực biến dạng dẻo chỉ xuất hiện và phát triển tại hai đầu phần tử, các tiết diện còn lại trong thanh vẫn biến dạng đàn hồi. Khi sự chảy dẻo ở tiết diện ngang đầu mút xảy ra, một khớp dẻo được hình thành đột ngột tại vị trí đó từ trạng thái đàn hồi. Khớp dẻo này được xem là “khớp lý tưởng” với ý nghĩa là không tiếp nhận được thêm nội lực nữa trong các bước gia tải tiếp theo. Orbison và cộng sự [9] đã thực hiện thành công phương pháp này kết hợp với mặt chảy dẻo để xác định sự hình thành khớp dẻo trong cấu kiện.

**2.3.2. Trạng thái của tiết diện khi chịu tải**



Hình 3. Ứng xử của tiết diện khi chịu tải



Hình 4. Mô hình khớp dẻo

- Khi tiết diện chỉ chịu mô men uốn thuần túy M (hình 1.4a), không xét ảnh hưởng của các yếu tố khác đến quá trình hình thành khớp dẻo của tiết diện. Các nghiên cứu sử dụng mô hình này cho phân tích khung thép phẳng như: Neal, Hodge, Steen, Võ Thanh Lương, Nguyễn Văn Tú, mô hình này chỉ phù hợp với dầm chịu uốn thuần túy, với phân tích khung thì không còn chính xác vì nó không kể đến ảnh hưởng của lực dọc. Mặt khác sự hình thành khớp dẻo đơn giản trong dầm (từ M đàn hồi tiết diện đạt ngay đến  $M_p$ ) không phản ánh được sự chảy dẻo lan truyền trên tiết diện dầm, không kể đến mô hình vật liệu phi tuyến, không kể đến góc xoay của tiết diện trong quá trình phân tích. Do đó cần đặt ra vấn đề nghiên cứu, đặc biệt là dầm liên hợp vì nó bao gồm cả vật liệu thép và bê tông cốt thép.

- Khi xem xét đến ảnh hưởng của lực dọc N thông qua mặt chảy M, N (hình 4b). Các nghiên cứu sử dụng mô hình này cho phân tích khung thép như: Chen, Yoshiaki và Lieuw, Kim, Park và Choi, Kim, Lee và Part, Nguyễn Văn Tú. Mô hình này không kể đến chuyển vị dọc trục  $\Delta$  do lực nén gây ra.

- Mô hình khớp dẻo có xét đến ảnh hưởng của lực dọc N và kể đến chuyển vị dọc trục  $\Delta$  thông qua mặt chảy M, N (hình 4c) là mô hình chính xác của khớp dẻo. Các nghiên cứu sử dụng mô hình này khi phân tích như: Milan và Ba, Orbison và cộng sự.

**2.3.3. Các dạng phân tích khớp dẻo**

**- Phương pháp khớp đàn - dẻo:**

Phương pháp này (hình 1.4) giả thiết rằng phần tử vẫn làm việc đàn hồi trên suốt chiều dài của nó, chỉ riêng ở hai đầu phần tử xuất hiện hai khớp dẻo có chiều dài bằng 0.

Phương pháp này xét đến tính dẻo của vật liệu nhưng chưa kể đến sự lan truyền vùng biến dạng dẻo:

Phương pháp khớp đàn dẻo có hai phương pháp phân tích sau:

+ *Phương pháp phân tích khớp đàn - dẻo bậc nhất*: bỏ qua các ảnh hưởng phi tuyến hình học, không xét đến khi thành lập phương trình cân bằng. Orbison và cộng sự [9], Balling và Lyon [10], Vũ Quốc Anh, Nghiêm Mạnh Hiến [11].

+ *Phương pháp phân tích khớp đàn - dẻo bậc hai*: có xét đến ảnh hưởng của phi tuyến hình học, chỉ cần dùng hàm ổn định để xét đến ảnh hưởng phi tuyến và cần dùng mô hình một phần tử cho một cấu kiện là có thể đạt được ảnh hưởng bậc hai. Các nghiên cứu sử dụng phương pháp này điển hình như: Chen và Sohal [6], Chen, Kim và Choi [7], Yong cùng cộng sự, Balling và Lyon [10], Vũ Quốc Anh, Nghiêm Mạnh Hiến [11].

**- Phương pháp hiệu chỉnh khớp dẻo:**

Để khắc phục hạn chế phương pháp khớp dẻo đơn giản do nó không kể đến sự chảy dẻo lan truyền trên tiết diện, tác giả Liew và cộng sự [12] đã phát triển và dùng mô hình mặt dẻo đồng dạng thể hiện ảnh hưởng của phân bố dẻo qua tiết diện ngang bằng các giả thiết quá trình làm giảm độ cứng khớp dẻo.

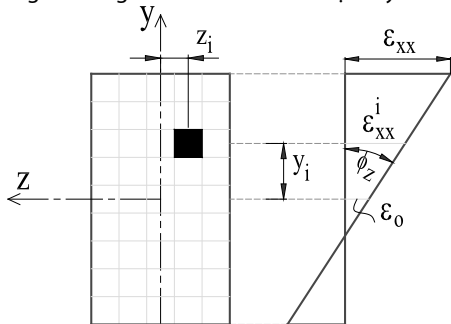
Phương pháp hiệu chỉnh khớp dẻo có 2 điều chỉnh quan trọng là dùng hàm giảm độ cứng tiết diện để phản ánh sự chảy dẻo lan truyền tại vị trí hình thành khớp dẻo (chỉ xét sự xuất hiện khớp dẻo ở 2 đầu phần tử).

Ưu điểm chính của phương pháp này là đơn giản, hiệu quả, có kết quả tương đối chính xác. Tuy nhiên phương pháp này vẫn chưa phản ánh hết các ứng xử của vật liệu và mới được nghiên cứu chủ yếu cho khung phẳng và đặc biệt là dẻo của liên kết dầm - cột, còn với khung liên hợp còn rất ít các nghiên cứu được công bố.

Chen, Kim và Choi [7], Kim và Choi [13] đã sử dụng phương pháp hiệu chỉnh khớp dẻo để phân tích nâng cao cho khung không gian có liên kết nửa cứng, sự phi tuyến về liên kết được xét đến thông qua mô hình ba thông số của Kishi và Chen. Sự phi tuyến về hình học trong đó ảnh hưởng biến dạng bậc một và bậc hai của kết cấu được xét đến bằng cách dùng hàm ổn định. Sự phi tuyến về vật liệu được xét đến bằng cách sử dụng môđun tiếp tuyến CRC và hàm parabol thể hiện sự chảy dẻo lan truyền của liên kết.

**2.4. Phương pháp vùng dẻo**

Phương pháp vùng dẻo hay phương pháp thứ là phương pháp có kể đến sự phát triển của vùng biến dạng dẻo trên các tiết diện dọc theo chiều dài của phần tử (chiều dài vùng biến dạng dẻo  $l_h \neq 0$ ). Phương pháp này chia cấu kiện thành nhiều phần tử con dọc theo chiều dài và chia tiết diện ngang thành nhiều thứ nhỏ như hình 5 và xác định độ cứng của từng thứ để mô hình hóa sự chảy dẻo.



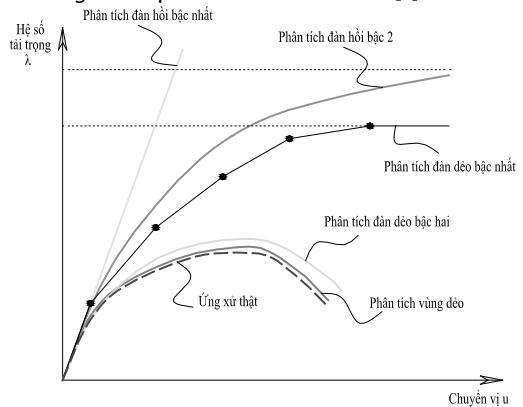
Hình 5. Phần tử thanh Bernoulli chia thứ tiết diện

Phương pháp này là cách tính chính xác để kiểm tra các phương pháp phân tích khác, nhưng phương pháp này phức tạp và đòi hỏi thời gian phân tích lớn (gấp hàng trăm lần tính theo phương pháp khớp dẻo – theo Ziemian 1993 [4]). Do đó nó không phù hợp với thực tế, chỉ phù hợp với các kết cấu đơn giản, nên phương pháp này được ít các tác giả áp dụng, Chan và Chui [4], Chen, Kim và Choi [7], Alvarenga, Li và Lui.

Izzuddin và Elnashai đã sử dụng mô hình vùng dẻo để nghiên cứu phản ứng tuần hoàn và phi đàn hồi của khung thép không gian. Nghiên cứu đã thực hiện rời rạc hóa kết cấu theo chiều cao các tiết diện và theo chiều dài các cấu kiện. Ứng suất tại các thứ dọc của cấu kiện được xác định bởi quan hệ ứng suất – biến dạng một trục đã cho. Khi thực hiện phân tích theo phương pháp này, thời gian phân tích là khá lâu. Filip và Fabio trình bày phương pháp thứ để phân tích phần tử dầm cột bê tông cốt thép. Phương pháp này chia tiết diện của cấu kiện thành từng thứ sao cho tọa độ, diện tích, tính chất vật liệu và cặp nhật sự thay đổi trục trung hòa trên từng tiết diện, ứng suất biến dạng trên từng thứ khi phân tích bằng thuật toán lập gia tăng từng bước. Cuong, Kim và Oh Jung đề xuất phương pháp khớp dẻo - thứ dùng hàm ổn định để triển khai ma trận độ cứng kết cấu để giải quyết bài toán khung không đàn hồi, xét đến phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu (vật liệu đàn dẻo lý tưởng). Phương pháp mà các tác giả này dùng phải chia tiết diện thành nhiều thứ nhỏ và phần tử thành nhiều phần tử con có chảy dẻo dần dần ở 2 đầu, do đó sẽ có khối lượng tính toán lớn nên mất nhiều thời gian để phân tích kết cấu.

**2.5. Các mức độ phân tích phi tuyến**

Trong phân tích kết cấu, rất khó để mô hình tất cả các yếu tố phi tuyến liên quan đến ứng xử của kết cấu như trong thực tế một cách chi tiết. Các mức độ thông thường nhất của phân tích phi tuyến được mô tả bởi các đường cong ứng xử của khung chịu tải trọng tĩnh như (hình 6) được các tác giả đề cập đến như: Chan và Chui [4].



Hình 6. Các mức độ phân tích phi tuyến

- **Phân tích đàn hồi bậc nhất**: là phương pháp cơ bản nhất trong đó vật liệu được mô phỏng đàn hồi và phương trình cân bằng được thiết lập với cấu hình chưa biến dạng của kết cấu, quan hệ giữa lực và chuyển vị là tỉ lệ qua phân tích. Phương pháp này không kể đến các yếu tố phi tuyến nào. Một số nghiên cứu sử dụng phương pháp này như: Chan và Chui [4], Orbison cùng cộng sự [9].

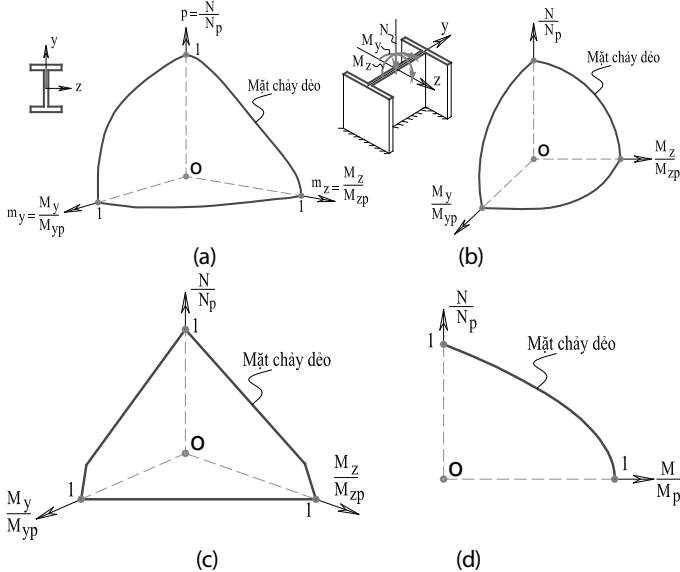
- **Phân tích đàn hồi bậc hai**: mô phỏng vật liệu là đàn hồi nhưng điều kiện cân bằng được thiết lập dựa vào cấu hình hình học đã biến dạng của kết cấu. Với hầu hết các khung, đường cong ứng xử tải trọng - chuyển vị có được từ phân tích bậc hai tiệm cận với mức tải trọng tới hạn của trạng thái ổn định đàn hồi của kết cấu.

- **Phân tích đàn dẻo bậc nhất**: mô phỏng sự chảy dẻo của cấu kiện dưới tác dụng của tải trọng tăng dần, các phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên cấu hình chưa biến dạng hình học của kết cấu. Vùng chảy dẻo phát triển tăng dần, hoặc nếu khớp dẻo xuất hiện thì sẽ có sự thay đổi đột ngột trong ứng xử của kết cấu. Khi vật liệu được xem là đàn dẻo hoàn toàn, đường cong ứng xử tải trọng sẽ tiệm cận với tải trọng giới hạn dẻo. Tải trọng giới hạn dẻo này được tính toán từ phân tích cơ cấu phá hoại dẻo của hệ, phân tích này không kể đến các tác động phi tuyến hình học như một số tác giả đã nghiên cứu: Vũ Quốc Anh và Nghiêm Mạnh Hiến [11], Orbison cùng cộng sự [9], Balling và Lyon [10].

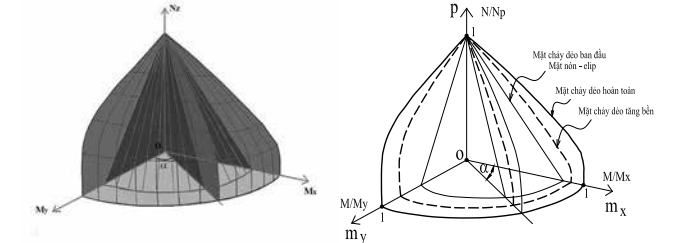
**- Phân tích đàn dẻo bậc hai:** bao gồm cả yếu tố phi tuyến hình học lẫn phi tuyến vật liệu. Phân tích này kể đến sự giảm độ cứng do sự chảy dẻo của cấu kiện và do chuyển vị lớn và nó mô phỏng đầy đủ và chính xác ứng xử thật của kết cấu và tải trọng giới hạn ổn định phi đàn hồi là sự thể hiện chính xác nhất của cường độ thực tế của khung, các nghiên cứu điển hình như: Chen, Kim và Choi [7], Balling và Lyon [10], Vũ Quốc Anh và Nghiêm Mạnh Hiến [11], Hoàng Hiếu Nghĩa [14].

**3. MẶT CHẢY DÈO CỦA TIẾT DIỆN CỘT THÉP**

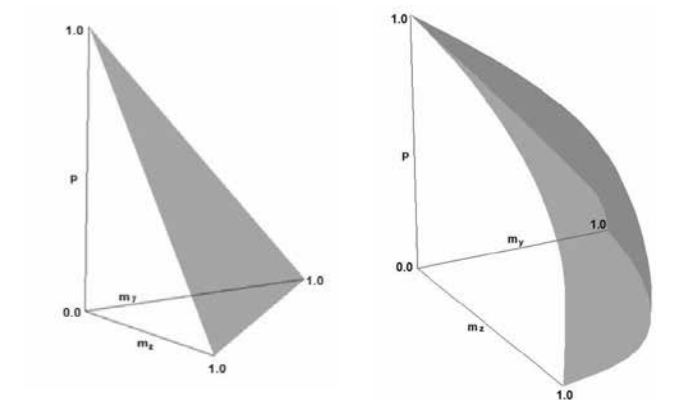
Khái niệm mặt chảy dẻo được đưa ra để kể đến ảnh hưởng đồng thời của lực dọc và mô men uốn trên cơ sở nội lực của phần tử. Khi mô men uốn và lực dọc trong phần tử đạt đến mặt chảy dẻo thì khớp dẻo được hình thành. Một số mặt chảy dẻo điển hình đã được đề xuất và áp dụng với nhiều nghiên cứu: Orbison [9], Duan và Chen [14], AISC-LRFD [15], Balling [10] (hình 7), tác giả [16,17,18] (hình 8).



Hình 7. Mặt chảy dẻo của các tác giả nghiên cứu trên thế giới



Hình 8. Biểu đồ mặt chảy dẻo tăng bền P-M<sub>x</sub>-M<sub>y</sub>, tác giả đề xuất [17]



Hình 9. Biểu đồ mặt giới hạn đàn hồi và mặt phá hoại tác giả đề xuất [16]

• Mặt chảy dẻo Orbison (hình 7a)

Orbison đã đề xuất mặt chảy giới hạn là một hàm lồi, trơn, nó thể hiện sự chảy dẻo hoàn toàn của tiết diện, mặt chảy này không phụ thuộc vào hình dạng của tiết diện và được thể hiện như phương trình sau:

$$\Phi(p, m_y, m_z) = 1.15p^2 + m_z^2 + m_y^4 + 3.67p^2m_z^2 + 3p^6m_y^2 + 4.65m_z^4m_y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\Phi(p, m_z) = 1.15p^2 + m_z^2 + 3.67p^2m_z^2 = 1 \quad (2)$$

• Mặt chảy dẻo Duan và Chen (hình 7b)

Duan và Chen đã đề xuất mặt chảy giới hạn là một hàm lồi, trơn, nó thể hiện sự chảy dẻo hoàn toàn của tiết diện, mặt chảy này phụ thuộc vào hình dạng tiết diện thông qua các hệ số  $\alpha_z, \alpha_y, \beta_z, \beta_y$  và được thể hiện ở phương trình sau:

$$\left(\frac{M_z}{M_{pcz}}\right)^{\alpha_z} + \left(\frac{M_y}{M_{pcy}}\right)^{\alpha_y} = 1.0; M_{pcz} = M_{pz} \left[1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^{\beta_z}\right];$$

$$M_{pcy} = M_{py} \left[1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^{\beta_y}\right] \quad (3)$$

• Mặt chảy dẻo AISC-LRFD (hình 7c)

Theo tiêu chuẩn AISC-LRFD mặt chảy giới hạn là hai mặt phẳng, nó thể hiện sự chảy dẻo hoàn toàn của tiết diện, mặt chảy này không phụ thuộc vào hình dạng của tiết diện.

$$\frac{N}{N_p} + \frac{8M_y}{9M_{yp}} + \frac{8M_z}{9M_{zp}} = 1 \quad \text{khi } \frac{N}{N_p} \geq 0,2 \quad (4)$$

$$\frac{N}{2N_p} + \frac{M_y}{M_{yp}} + \frac{M_z}{M_{zp}} = 1 \quad \text{khi } \frac{N}{N_p} < 0,2 \quad (5)$$

• Mặt chảy dẻo Balling (hình 7d):  $\left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \frac{M}{M_{yp}} = 1 \quad (6)$

Balling đã đề xuất mặt chảy giới hạn là một hàm lồi, trơn, nó thể hiện sự chảy dẻo hoàn toàn của tiết diện và được áp dụng cho khung phẳng.

• Mặt chảy dẻo tăng bền tác giả nghiên cứu đề xuất (hình 8):

Mặt chảy dẻo tăng bền 3D của tiết diện cột thép chữ I chịu nén uốn hai phương là một hàm lồi, trơn phụ thuộc vào góc xoay dẻo  $\theta_p$  và các hệ số, nó biểu diễn quá trình chảy dẻo tăng bền trên mặt cắt tiết diện cột thép từ giai đoạn đàn hồi sang giai đoạn chảy dẻo cho đến khi chảy dẻo hoàn toàn trong quá trình phân tích kết cấu 2D và 3D

Dạng của:  $N_{f(\theta)} = f_1(\theta) + f_2\left(\frac{d}{\theta}\right) + f_3\left(\frac{e}{\theta^2}\right) = a.\theta^2 + b.\theta + c + \frac{d}{\theta} + \frac{e}{\theta^2} \quad (7)$

Dạng của:  $M_{f(\theta)} = f_1(\theta) + f_2\left(\frac{d}{\theta^2}\right) + f_3\left(\frac{e}{\theta^3}\right) = a.\theta^2 + b.\theta + c + \frac{d}{\theta^2} + \frac{e}{\theta^3} \quad (8)$

• Mặt giới hạn đàn hồi và mặt phá hoại tác giả nghiên cứu đề xuất (hình 9):

Mặt giới hạn đàn hồi của tiết diện cột thép chữ I chịu nén uốn hai phương là một mặt phẳng; mặt phá hoại là một hàm lồi, trơn, nó biểu diễn thời điểm giới hạn đàn hồi và thời điểm chảy dẻo lan truyền trên mặt cắt tiết diện cột thép từ giai đoạn đàn hồi sang giai đoạn chảy dẻo cho đến khi chảy dẻo hoàn toàn trong quá trình phân tích kết cấu 2D và 3D [16].

Mặt giới hạn đàn hồi

$$p + m_{ye0} + m_{ze0} = 1 \quad (9)$$

Trong đó:  $m_{ye0} = \frac{M_{ye0}}{M_{ye}}$ ;  $m_{ze0} = \frac{M_{ze0}}{M_{ze}} \quad (10)$

Mặt phá hoại và mặt chảy dẻo xem [16]

Khi phân tích dẻo kết cấu, các nghiên cứu đã xem xét mặt chảy dẻo của tiết diện như sau: (1) tiết diện có điểm lực nằm bên trong mặt chảy thì tiết diện đó vẫn còn đàn hồi, (2) tiết diện có điểm lực nằm trên mặt chảy dẻo thì tiết diện đó là chảy dẻo hoàn toàn, các nghiên cứu về vấn đề này như: Orbison, Mc Guire và Abel [9], Vũ Quốc Anh và Nghiễm Mạnh Hiến [11], Hoàng Hiếu Nghĩa [16],[17],[19] đã sử dụng mặt chảy dẻo 3 chiều của tiết diện chịu đồng thời lực dọc và mômen uốn. Khi các điểm lực phía trong mặt chảy dẻo, tiết diện được giả định là đàn hồi lý tưởng, khi điểm lực nằm trên bề mặt chảy, tiết diện được giả thiết là dẻo hoàn toàn, theo đó sự chảy dẻo một phần vật liệu trên tiết diện đã không được xem xét.

Vũ Quốc Anh và Nghiễm Mạnh Hiến [11] đã phân tích nội lực và chuyển vị của khung thép có kể đến sự hình thành khớp dẻo, các tác giả đã sử dụng mặt chảy Orbison để xét sự hình thành khớp dẻo và đã xây dựng phần tử thanh với hai đầu chảy dẻo và bên trong phần tử vẫn đàn hồi, áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn và xây dựng chương trình KCW V1.0 để phân tích dẻo kết cấu khung thép phẳng. Phương pháp này áp dụng đơn giản nhưng chưa phản ánh chính xác sự làm việc dẻo của kết cấu vì chưa xét đến sự chảy dẻo bên trong của thanh.

Như phân tích phương pháp vùng dẻo ở trên ta thấy thực tế trên tiết diện có sự chảy dẻo lan truyền từ đàn hồi đến chảy dẻo hoàn toàn và lan truyền dẻo dọc theo chiều dài cấu kiện.

Hoàng Hiếu Nghĩa, Vũ Quốc Anh và Nghiễm Mạnh Hiến [16],[17],[19] đã sử dụng mặt chảy dẻo 3 chiều của tiết diện chịu đồng thời lực dọc và mômen uốn để phân kể đến sự chảy dẻo lan truyền trên tiết diện và lan truyền vùng biến dạng dẻo dọc theo chiều dài phần tử mà vẫn không phải chia nhiều thớ trên tiết diện, nhiều phần tử trên chiều dài cấu kiện, làm giảm khối lượng tính toán và không mất nhiều thời gian phân tích kết cấu.

#### 4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN KẾT CẤU KHUNG CÓ XUẤT HIỆN KHỚP DẸO

##### 4.1. Phương pháp trực tiếp

Phương pháp trực tiếp là phương pháp phân tích kết cấu chỉ bằng một bước phân tích (phương pháp đơn giản). Khi phân tích kết cấu ở trạng thái giới hạn dẻo thì hệ số tải trọng được xác định trực tiếp không thông qua bất cứ trạng thái trung gian nào của hệ kết cấu như được chỉ ra trong Weichert và Pontet, Neal, do đó nó không ảnh hưởng bởi ứng xử cục bộ của kết cấu (điều này thường được xây ra trong phương pháp phân tích từng bước). Phương pháp trực tiếp bao gồm phương pháp tĩnh học và động học. Cả hai phương pháp tĩnh học và động học được nghiên cứu nhiều và hoàn thiện cách đây 50 năm.

##### 4.1.1. Phương pháp tĩnh học

Điều cơ bản của phương pháp tĩnh học là vẽ biểu đồ mô men của hệ khi chịu tải trọng tác dụng, xem xét điều kiện cân bằng (xét quan hệ cân bằng giữa tải trọng tác dụng và giá trị mô men tại một vị trí). Mô men tại bất kỳ vị trí nào dọc theo kết cấu đều có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng khả năng chịu lực của cấu kiện ( $M_p$ ) và khi đó sẽ cho ta giá trị ước lượng của tải trọng giới hạn dẻo  $\lambda_i$ . Giá trị tải trọng giới hạn trên là đúng nếu biểu đồ mô men chỉ ra rằng số khớp dẻo đủ để tạo nên cơ cấu sụp đổ và khi đó các giá trị  $M$  đạt đến  $M_p$  (Michel Bruneau). Theo phương pháp này thì hệ số tải trọng giới hạn của kết cấu  $\lambda_{gh}$  sẽ là giá trị lớn nhất trong các giá trị  $\lambda_i$  ( $\lambda_{gh} = \max(\lambda_i)$ ). Lý thuyết phương pháp này được đặt nền móng từ năm 1917 bởi Kist, sau đó được áp dụng trong các nghiên cứu của Gvozdev (1936), Horne (1950), Greenberg và prager (1952), Neal (1956), Michel Bruneau (2011).

##### 4.1.2. Phương pháp động học

Điều cơ bản của phương pháp động học là giả thiết hệ hình thành cơ cấu sụp đổ chuẩn xác khi đó ta sẽ có được giá trị của tải trọng giới hạn gây ra cho hệ biến thành cơ cấu. Tải trọng giới hạn này được xác

định bằng phương pháp công ảo dựa trên chuyển vị dẻo (góc xoay và chuyển vị nút) của hệ cơ cấu. Khi hệ ở trạng thái hình thành cơ cấu dẻo thì công của nội lực ( $W_{int}$ ) tại các vị trí xuất hiện khớp dẻo sẽ cân bằng với công của ngoại lực ( $W_{ext}$ ) như được chỉ ra trong các nghiên cứu: Neal, Michel.

$$W_{int} = W_{ext} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n M_p \phi_i = \sum_{j=1}^n P_j \delta_j + \int_{x=0}^L \omega(x) \delta(x) dx \quad (7)$$

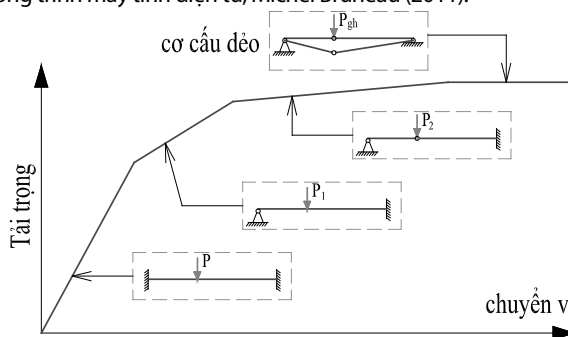
Với  $\phi_i$  là góc xoay dẻo tại vị trí khớp dẻo,  $M_p$  là mô men dẻo của tiết diện,  $P_j$  và  $\delta_j$  là lực và chuyển vị tương ứng tại nút  $j$ ,  $\omega(x)$  và  $\delta(x)$  là tải trọng phân bố và chuyển vị dọc theo chiều dài cấu kiện.

Hệ số tải trọng giới hạn ở cơ cấu  $i$ :  $\lambda_i$  = Tải trọng giới hạn ở cơ cấu  $i$  / Tải trọng tác dụng. Theo phương pháp này thì hệ số tải trọng giới hạn của kết cấu  $\lambda_{gh}$  sẽ là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị  $\lambda_i$  ( $\lambda_{gh} = \min(\lambda_i)$ ).

Điều khó khăn của phương pháp này là sự dự đoán không chính xác của cơ cấu sụp đổ sẽ cho ta giá trị của tải trọng giới hạn của kết cấu không chính xác.

#### 4.2. Phương pháp gia tải từng bước

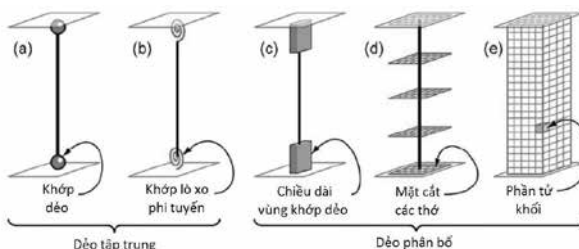
Phương pháp từng bước hay phương pháp đàn hồi - dẻo gia tăng là phương pháp dựa vào phân tích đàn hồi. Quá trình chất tải được chia ra làm nhiều bước, từ bước ứng xử đàn hồi đầu tiên. Sau mỗi bước chất tải, ma trận độ cứng sẽ được cập nhật để xét đến ảnh hưởng phi tuyến vật liệu cho tới khi khớp dẻo đầu tiên được hình thành và tiếp tục tăng tải cho tới khi các khớp dẻo hình thành và hình thành cơ cấu phá hoại dẻo (hình 8). Phương pháp này rất phù hợp khi áp dụng chương trình máy tính điện tử, Michel Bruneau (2011).



Hình 8. Các bước tải của phương pháp gia tải từng bước

#### 4.3. Phương pháp PTHH

Với những kết cấu đơn giản, khi phân tích kết cấu có thể dùng các phương pháp phân tích dẻo đơn giản ở trên. Với công trình trên thực tế, số lượng phần tử rất lớn (hàng trăm, hàng nghìn phần tử), việc dùng các phương pháp đơn giản để phân tích không còn phù hợp và không thể thực hiện được. Ngày nay với sự phát triển của kỹ thuật máy tính điện tử nên với các bài toán lớn, phức tạp đã được giải quyết thông qua phương pháp PTHH. Các mô hình phần tử dầm - cột được các tác giả sử dụng trong các nghiên cứu như (hình 9).



Hình 9. Mô hình phần tử dầm - cột trong phương pháp PTHH

• **Phần tử thanh có khớp dẻo lý tưởng ở hai đầu (hình 9a)**

Vùng biến dạng dẻo được giới hạn có chiều dài bằng không có thể xuất hiện tại vị trí hai đầu phần tử (hình 1.9a), vật liệu được coi là đàn hồi dẻo lý tưởng. Tiết diện hai đầu phần tử có thể chuyển từ trạng thái đàn hồi sang trạng thái dẻo hoàn toàn. Nhiều tác giả đã dùng phần tử thanh này cho nghiên cứu của mình: Chan và Chui [4], White [5], Chen và Sohail [6], Chen, Kim và Choi [7], Yong cùng cộng sự [104], Orbison cùng cộng sự [9], Liew và Chen [12].

Phương pháp này giả thiết rằng phần tử vẫn làm việc đàn hồi trên suốt chiều dài của nó, chỉ riêng ở hai đầu phần tử xuất hiện hai khớp dẻo có chiều dài bằng 0. Phương pháp này đơn giản, có xét đến tính dẻo của vật liệu nhưng chưa kể đến sự lan truyền dẻo nên độ chính xác không cao.

• **Phần tử thanh có liên kết lò xo phi tuyến ở hai đầu (hình 9b)**

Liên kết được mô hình hóa bằng các lò xo dạng dây cốt có độ mềm cho chuyển vị xoay gắn ở hai đầu thanh tạo thành phần tử ghép lò xo-dầm-lò xo như (hình 9b). Mô hình này đã được nhiều tác giả sử dụng cho bài toán phân tích kết cấu khung thép có xét đến độ mềm của liên kết dầm - cột như: Chan và Chui [4], Kim và Choi [13]...

Phần tử thanh hai đầu là liên kết lò xo chủ yếu dùng trong phân tích kết cấu có kể đến độ cứng của liên kết, tính dẻo của vật liệu trong phần tử không được đề cập đến khi dùng loại phần tử này.

• **Phần tử thanh có chiều dài vùng khớp dẻo ở hai đầu (hình 9c)**

Phần tử thanh được chia làm ba phần, ở hai vùng đầu phần tử là chia thành các phần tử rất nhỏ với các tiết diện được chia thớt, phần giữa của phần tử vật liệu vẫn làm việc đàn hồi. Cuong và Kim đã sử dụng phương pháp khớp - thớt ở hai đầu phần tử để phân tích kết cấu khung portal. Phương pháp này mô tả được vùng chảy dẻo ở hai đầu phần tử, còn ở phần giữa vật liệu vẫn đàn hồi, do đó không giống với ứng xử thực của kết cấu.

• **Phần tử thanh có tiết diện chia thớt dọc theo chiều dài phần tử (hình 9d)**

Phương pháp này chia cấu kiện thành nhiều phần tử con dọc theo chiều dài, mỗi phần tử có 2 tiết diện ở hai đầu và chia tiết diện ngang thành nhiều thớt và xác định độ cứng của từng thớt để mô hình hóa sự chảy dẻo của tiết diện. Phương pháp này phức tạp và đòi hỏi thời gian phân tích lớn (gấp hàng trăm lần tính theo phương pháp khớp dẻo - theo Ziemian [4]). Do đó chỉ phù hợp với các kết cấu đơn giản, với kết cấu lớn thì phương pháp này ít được các tác giả áp dụng, các nghiên cứu điển hình như: Chan và Chui [4], Chen, Kim và Choi, Chen, Alvarenga, Li và Lui, Ngo Huu Cuong, Kim và Rylu.

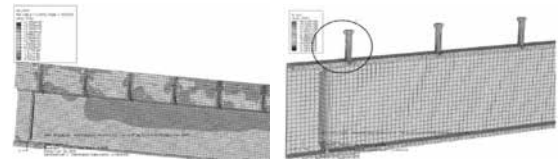
• **Phần tử khối (hình 9e)**

Phần tử khối là các phần tử hữu hạn ba chiều được sử dụng trong mô hình vật rắn và kết cấu dạng khối. Có ba phần tử khối chuẩn là: phần tử khối tứ diện, dạng nêm và khối lục diện tương ứng với 4, 6 và 8 nút (hình 10). Các phần tử này được sử dụng trong các chương trình Abaqus, Ansys, Midas, Adina, khi phân tích trạng thái ứng suất biến dạng của hệ kết cấu.



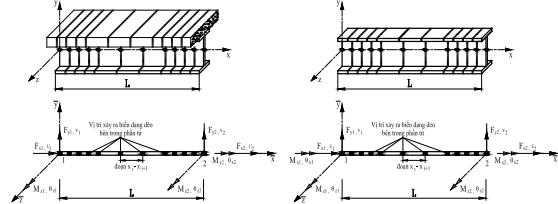
**Hình 10.** Phần tử tứ diện, phần tử dạng nêm và phần tử lục diện

Khi phân tích bằng PTHH dạng phần tử khối cho ta kết quả chính xác, nhưng khối lượng tính toán khổng lồ, nên chỉ dùng để phân tích các cấu kiện nhỏ để kiểm chứng các kết quả thí nghiệm, còn với công trình lớn thì thực hiện rất khó khăn và mất rất nhiều thời gian. Kim và Lee, Mutlu đã sử dụng phần tử C3D8R phân tích ứng xử của dầm liên hợp thép - bê tông bằng chương trình Abaqus, dầm được chia 45.514 phần tử và 58.123 điểm nút (hình 11).



**Hình 11.** Mô hình dầm liên hợp sử dụng phần tử C3D8R bằng Abaqus

• **Siêu phần tử thanh - tác giả nghiên cứu đề xuất [18] (hình 11)**



**Hình 12.** Siêu phần tử dầm - cột. (a): phần tử dầm liên hợp; (b): phần tử cột thép

Siêu phần tử thanh (Hình 12) chỉ có 2 nút 1 và 2 ở hai đầu mặc định có n điểm biến dạng dẻo liên tục bên trong phần tử, mỗi đoạn  $x_i - x_{i+1}$  gồm hai điểm biến dạng dẻo liên tiếp và đoạn này có độ cứng  $E_i$  thay đổi theo hàm bậc 3. Biến dạng dẻo tại đầu từng đoạn  $i$  ( $i=1$ ):  $\{u_{i-1}, v_{i-1}, \theta_{i-1}, u_i, v_i, \theta_i\}$

Tác giả đã xây dựng một mô hình phần tử có kể đến sự chảy dẻo lan truyền trên tiết diện và lan truyền vùng biến dạng dọc theo chiều dài phần tử mà vẫn không phải chia nhiều thớt trên tiết diện, nhiều phần tử trên chiều dài cấu kiện, làm giảm khối lượng tính toán và không mất nhiều thời gian phân tích kết cấu, thực hiện phân tích kết quả nghiên cứu xem [18], [19].

**5. VÍ DỤ PHÂN TÍCH**

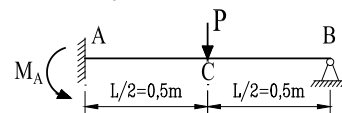
Các ví dụ để chứng minh xu hướng phân tích phi tuyến mới, hiện đại trong tương lai được trình bày cụ thể trong [16], [18], [19].

Bài báo này chỉ thực hiện một ví dụ phân tích kết cấu dầm bằng phương pháp đơn giản (phương pháp khớp dẻo trực tiếp) để thấy rõ được hiệu quả của việc áp dụng lý thuyết dẻo vào trong phân tích kết cấu công trình.

Khảo sát ứng xử của dầm (Hình 13) dưới tác dụng của tải trọng tăng dần từ giá trị  $P=40$  kN.

$L=1$ m, mặt cắt tiết diện có  $M_p=10,0$  kNm;  $EI=10$  kNm<sup>2</sup>

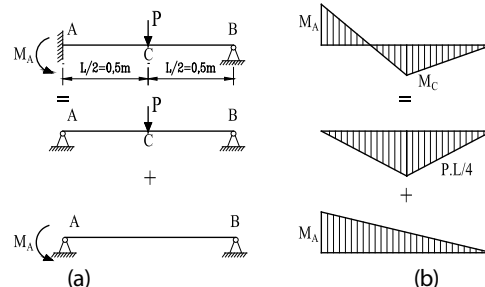
Sử dụng phương pháp khớp dẻo trực tiếp để xác định hệ số tải trọng giới hạn của kết cấu  $\lambda_{gh}$



**Hình 13.** Sơ đồ tĩnh của dầm

**5.1. Sử dụng phương pháp tĩnh học**

- b1. Chuyển từ sơ đồ kết cấu siêu tĩnh về các sơ đồ tĩnh định (Hình 14a)
- b2. Vẽ biểu đồ nội lực của các sơ đồ tĩnh định (Hình 14b)
- b3. Thực hiện cộng biểu đồ để được biểu đồ nội lực của hệ kết cấu ban đầu (Hình 13b)



**Hình 14.** Vẽ biểu đồ mô men của hệ dầm siêu tĩnh

b4. Xác định biểu thức cân bằng từ biểu đồ nội lực của kết cấu ban đầu

$$M_c + \frac{M_A}{2} = \frac{P.L}{4} \quad (8)$$

b5. Xác định các vị trí hình thành khớp dẻo để hệ có thể biến thành cơ cấu

Khi đó giá trị mô men tại khớp dẻo đạt giá trị  $M_p$

Với ví dụ này: 2 vị trí khớp dẻo là tại A và C  $\rightarrow M_A = M_c = M_p$  thay vào (8) ta có:

$$M_p + \frac{M_p}{2} = \frac{P.L}{4} \quad (9)$$

b6. Xác định tải trọng giới hạn và hệ số tải trọng giới hạn

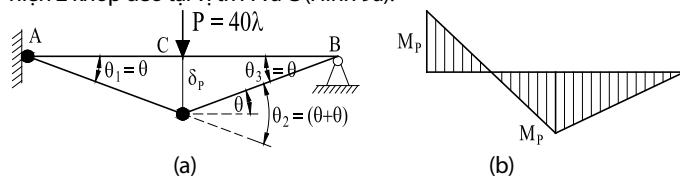
$$\text{Từ phương trình (9)} \rightarrow P_{gh} = \frac{6M_p}{L} = \frac{6.10}{1} = 60 \text{ kN}$$

Hệ số tải trọng giới hạn:

$$P_{gh} = P.\lambda_{gh} = \frac{6M_p}{L} \rightarrow \lambda_{gh} = \frac{6M_p}{P.L} = \frac{6.10}{40.1} = 1,5$$

### 5.2. Sử dụng phương pháp động học

Ta xét theo ví dụ trên, hệ kết cấu dầm hình thành cơ cấu khi xuất hiện 2 khớp dẻo tại vị trí A và C (Hình 9a).



**Hình 15.** Sơ đồ cơ cấu (a) và biểu đồ mô men ở trạng thái giới hạn (b) Theo phương pháp động học: Áp dụng công thức (7)

$$W_{int} = W_{ext} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n M_p \theta_i = \sum_{j=1}^n P_j \delta_j + \int_{x=0}^L \omega(x) \delta(x) dx$$

$$\Leftrightarrow M_p.\theta_1 + M_p.\theta_2 = 40\lambda.\delta_p \Leftrightarrow 3M_p.\theta = 40.\lambda.\theta.\frac{L}{2} \rightarrow$$

$$\lambda_{gh} = \frac{6.M_p.L}{40} = \frac{6.10.1}{40} = 1,5$$

Kết quả hoàn toàn trùng khớp khi phân tích kết cấu dầm bằng phương pháp tĩnh học và động học.

## 6. KẾT LUẬN

Khi phân tích và tính toán kết cấu các kỹ sư thường sử dụng phương pháp thiết kế truyền thống, phương pháp này đã được áp dụng lâu đời và có ưu điểm là đơn giản hóa công việc thiết kế của người kỹ sư. Tuy nhiên nó không thể hiện rõ quan hệ phi tuyến giữa tải trọng và chuyển vị, không thể hiện rõ tính phi tuyến của vật liệu kết cấu, chưa xem xét đầy đủ ứng xử của toàn hệ kết cấu, chưa xác định được tải trọng giới hạn của kết cấu, do đó nó dẫn đến việc lãng phí vật liệu.

Việc phân tích phi tuyến đã được chấp nhận trong tiêu chuẩn của nhiều nước trên thế giới: EC-3, ASCE, AISC-LRDF, ANSI/AISC 360-10 và một số chương trình phân tích kết cấu Abaqus, Ansys, Midas, Adina và phương pháp đơn giản. Tuy nhiên khi phân tích phi tuyến kết cấu, trong các tiêu chuẩn và các nhà nghiên cứu thường sử dụng hai phương pháp cơ bản: Phương pháp vùng dẻo và phương pháp khớp dẻo, mỗi phương pháp có ưu nhược điểm khác nhau.

Bài báo này thực hiện một ví dụ phân tích kết cấu dầm bằng phương pháp đơn giản (phương pháp khớp dẻo trực tiếp) để thấy rõ được hiệu quả của việc áp dụng lý thuyết dẻo vào trong phân tích kết cấu công trình.

Qua phân tích ưu nhược điểm của các mô hình phần tử dầm - cột trong phương pháp PTHH, cho thấy cần thiết xây dựng một mặt chảy

dẻo, một mô hình phần tử có kể đến sự chảy dẻo lan truyền trên tiết diện và lan truyền vùng biến dạng dẻo dọc theo chiều dài phần tử mà vẫn không phải chia nhiều thớ trên tiết diện, nhiều phần tử trên chiều dài cấu kiện, làm giảm khối lượng tính toán và không mất nhiều thời gian phân tích kết cấu [16], [18], [19].

Bài báo đã trình bày tổng quan về các phương pháp phân tích phi tuyến kết cấu thép. Phân tích các phương pháp phân tích phi tuyến hiện nay, các phương pháp tính toán kết cấu khung có xuất hiện khớp dẻo đang được áp dụng trong các nghiên cứu và trong các tiêu chuẩn hiện hành. Từ phân tích đó có thể đánh giá được ưu nhược điểm của từng phương pháp và đề xuất các hướng phân tích phi tuyến mới trong tương lai [16], [18], [19]. Các ví dụ để chứng minh xu hướng phân tích phi tuyến mới trong tương lai được trình bày cụ thể trong [16], [18], [19].

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. AISC (2010), ANSI/AISC 360-10, *Specification for Structural Steel Buildings*, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL.
2. Nair R. S (2007), *Stability Analysis and the 2005 AISC Specification*, Modern Steel Construction.
3. Seung - Eock Kim and W.F Chen (1999), *An Innovative Design for steel frame using advanced analysis* footnotemark structural engineering handbook, Boca Raton: CRC Press LLC.
4. Chan, S.L. and Chui, P.P.T (2000), *Non - linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections*, Elsevier Science Ltd, Amsterdam.
5. White, D.W (1993), *Plastic - Hing Method for Advanced Analysis of Steel Frames*, J. Construct. Steel Res. 24, pp. 121-152.
6. Chen, W.F. and Sohal, I (1995), *Plastic Design and Second - order Analysis of Steel Frames*, Springer - Verlag, New York Inc.
7. Chen, W.F., Kim, S.E. and Choi, S.H (2001), *Practical Second-Order Inelastic Analysis for Three-Dimensional Steel Frames*, Steel Struct. 1, pp. 213-223.
8. Yong - Lin Pi cùng cộng sự (2006), *Second order nonlinear in elastic analysis of composit steel- concrete members*, Journal of Structural
9. Orbison JG, Mc Guire, F. Abel (1982), *Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis*, Computer Method in applied Mechanics and Engineering (33): 557-573.
10. Richard J. Balling, P.E and Jesse W. Lyon (2010), *Second - order analysis of plane frames with one element per member*.
11. Vũ Quốc Anh, Nghiêm Mạnh Hiến (2003), *Phân tích nội lực và chuyển vị khung thép có kể đến sự hình thành khớp dẻo*, Tại hội nghị Cán bộ khoa học trẻ Viện KHCN xây dựng lần thứ 8.
12. Liew J.Y.R, Chen WF (2000), *Advanced inelastic analysis of frame structures*, Journal of Constructional Steel Research; 55:245-265.
13. Kim SE, Choi SH (2001), *Practical advanced analysis for semi-rigid space frames structures*, International Journal of Solids and Structures; 38:9111-31.
14. William M. C Guige and Ronald D. Ziemian (1998), *Matrix Structural Analysis*, 2nd Ed. John Wiley and Sons, Inc.
15. American Institute of Steel Construction (1999), *LRFD Specification for Structural Steel Buildings*, Chicago, Illinois, USA.
16. Vũ Quốc Anh, Hoàng Hiếu Nghĩa, Nghiêm Mạnh Hiến. (2020), *"An efficient method for yield and failure surfaces of the steel I - section"*, Advanced Steel Construction; Vol. 16No. 3. 246-254.
17. Hoàng Hiếu Nghĩa, Nghiêm Mạnh Hiến, Vũ Quốc Anh. (2016), *"Xây dựng mặt chảy dẻo tăng bền của tiết diện cột thép chữ I chịu nén uốn hai phương p-mx-my"*, Tạp chí xây dựng - Bộ Xây Dựng, Hà Nội 8/2016, Tr. 155-161. IS 0866-0762.
18. Hoàng Hiếu Nghĩa, Nghiêm Mạnh Hiến, Vũ Quốc Anh. (2018), *"Phân tích dẻo lan truyền khung phẳng liên hợp thép - bê tông chịu tải trọng tĩnh sử dụng siêu phần tử thanh"*, Tạp chí Xây dựng - Bộ Xây dựng, Hà Nội 3/2018, Tr. 33-37. IS 0866-0762.
19. Hoàng Hiếu Nghĩa (2020), *Phân tích dẻo kết cấu khung cột thép dầm liên hợp chịu tải trọng tĩnh*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.