

Tích hợp thuật toán Jellyfish Search với phương pháp phần tử hữu hạn để tối ưu trọng lượng kết cấu với ràng buộc tần số dao động riêng

Integrating Jellyfish search optimizer with finite element method to optimize structural weight under multiple natural frequency constraints

> **THS HOÀNG TRUNG THỐNG¹, TS TRƯƠNG ĐÌNH NHẬT^{2*}**

¹GV Khoa Tài nguyên nước, Trường ĐH Tài nguyên và Môi trường TP.HCM

Email: htthong@hcmunre.edu.vn

^{2*}GV Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc TP. HCM; Email: nhat.truongdinh@uah.edu.vn

TÓM TẮT

Nghiên cứu xây dựng mô hình tối ưu hóa tìm kiếm sứa (Jellyfish Search, JS) được tích hợp với phương pháp phần tử hữu hạn (Finite element method, FEM) thành mô hình JS-FEM. Mô hình JS-FEM áp dụng giải quyết ba bài toán tối ưu hóa trọng lượng cho giàn 37 thanh, giàn 72 thanh và vòm giàn 600 thanh với ràng buộc tần số dao động riêng. Kết quả số từ JS-FEM được so sánh với kết quả đã công bố trước đây minh chứng cho sự hiệu quả của mô hình này trong bài toán tối ưu hóa kết cấu có ràng buộc tần số dao động riêng với kết quả trọng lượng và số lần lặp của bước phân tích kết cấu cũng nhỏ hơn so với một số công bố đã được trích dẫn gần đây.

Từ khóa: Trình tối ưu hóa tìm kiếm sứa; phương pháp phần tử hữu hạn; tối ưu hóa; tần số dao động riêng.

ABSTRACT

This study aims to intergate Jellyfish search (JS) optimizer with the finite element method (FEM) to optimize structural weight under multiple natural frequency constraints. The proposed model (JS-FEM) is applied to solve three weight optimization problems, including a 37-bar truss, 72-bar truss, and 600-bar single layer dome truss. Results obtained by JS-FEM are validated by literatures, and indicate that JS-FEM not only can find better results but also use fewer number of structural analysis (NSA). Therefore, JS-FEM is an effective tool to optimize structural weight under multiple natural frequency constraints.

Keywords: Jellyfish search optimizer, finite element method, metaheuristic optimization, natural frequency constraints.

1. GIỚI THIỆU

Các đặc tính động lực học của kết cấu có thể được cải thiện đáng kể bằng cách kiểm soát tần số riêng, đây là thông số quan trọng nhất ảnh hưởng đến thành phần động của kết cấu khi chịu rung động tự do [1-3]. Bằng cách phân tích các tiết diện của kết cấu với điều kiện tần số dao động riêng có thể thực hiện việc cải tiến các đặc trưng động của kết cấu. Tối ưu hóa kết cấu dưới các ràng buộc về tần số cho phép kiểm soát các đặc tính động của kết cấu [4].

Các bài toán tối ưu hóa với ràng buộc tần số dao động riêng là bài toán phi tuyến, không lồi và đa phương đối với các biến thiết kế [5]. Việc thay đổi các tần số dao động do thay đổi kích thước và hình dạng dẫn đến khó khăn trong việc giải các bài toán tối ưu hóa với ràng buộc này, chúng có thể gây ra nhiều khó khăn về hội tụ của lời giải [1]. Do đó, các phương pháp tối ưu hóa cổ điển phụ thuộc vào thông tin về độ dốc của tần số đối với các biến thiết kế có thể rất ít hiệu quả [6]. Vì vậy, các thuật toán tối ưu hóa Metaheuristic được lựa chọn như các giải pháp thay thế.

Trong vài thập kỷ gần đây, một trong những lĩnh vực nghiên cứu nổi trội nhất trong kỹ thuật tối ưu hóa gần đúng là các thuật toán tối ưu hóa Metaheuristic [7-13]. Dựa trên các kỹ thuật này, các bài toán tối ưu khó và thậm chí cả các bài toán Nondeterministic Polynomial Time (NP) được tìm thấy những lời giải tối ưu hoặc gần tối ưu [12, 14-16]. Metaheuristic được sử dụng nhiều trong kỹ thuật ứng dụng bởi các lý do sau: (1) dễ thiết kế và thực hiện; (2) không sử dụng thông tin độ dốc trong quá trình tối ưu hóa; và (3) có thể áp dụng rộng rãi cho nhiều bài toán tối ưu hóa [7, 16-19].

Do đó, các thuật toán metaheuristic dùng để thiết kế các kết cấu với ràng buộc tần số dao động riêng đã được nhiều nhà nghiên cứu sử dụng trong những năm gần đây. Gomes (2011) đã kiểm tra việc tối ưu hóa hình dạng và kích thước của giàn với điều kiện tần số dao động riêng bằng cách sử dụng thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (Particle Swarm Optimization-PSO). Kết quả của Gomes cho thấy PSO hoạt động tương tự như các phương pháp khác và thậm chí còn tốt hơn trong một số trường hợp so sánh [20]. Thêm vào đó, Linh Van và cộng sự (2005) đã tối ưu hóa hình dạng và kích thước của giàn với các ràng buộc tần số bởi đề xuất thuật toán di truyền lai thích hợp (Niche Hybrid Genetic Algorithm-

NHGA) [6]. Kaveh và Zolghadr (2012) đã đề xuất sự kết hợp giữa Charged System Search và Big Bang-Big Crunch (CSS-BBBC) với khả năng nhận dạng bầy và sử dụng nó để giảm trọng lượng của kết cấu với điều kiện tần số dao động riêng [21].

Theo dòng thời gian, việc dùng các thuật toán kết hợp để tối ưu hóa kết cấu cũng trở nên phổ biến. Để tối ưu hóa hình dạng và kích thước của giàn với điều kiện tần số dao động riêng, các thuật toán the orthogonal multi-gravitational search algorithm (OMGSA), multi-Gravitational Search Algorithm (multi-GSA) và Orthogonal Crossover (OC) đã được kết hợp bởi Khatibnia và Naseralavi (2014) [22]. Mặt khác, Kaveh và Ilchi Ghazaan (2016) đã chỉ ra rằng tối ưu hóa các kết cấu mái vòm quy mô lớn với các điều kiện tần số dao động riêng tỏ ra hiệu quả khi áp dụng phương pháp để tối ưu hóa các vật thể va chạm do chính họ đề xuất [23].

Nhằm giải quyết các vấn đề tối ưu hóa hình dạng và kích thước cho cấu trúc giàn với điều kiện tần số dao động riêng, một phiên bản mới của thuật toán tiến hóa vi phân được gọi là ReDE được phát triển bởi Ho Huu (2018) là vượt trội hơn nhiều phương pháp tối ưu được so sánh [24]. Kaveh và Zolghadr (2018) đã chỉ ra rằng thuật toán Cyclical parthenogenesis algorithm (CPA) vượt trội so với các thuật toán tối ưu Democratic Particle Swarm Optimization (DPSO), Big Bang-Big Crunch (BB-BC), Harmony Search (HS), Enhanced Colliding Bodies Optimization (ECBO), and ECBO-Cascade trong việc giải quyết bài toán giảm thiểu trọng lượng của giàn không gian đối xứng theo chu kỳ với điều kiện tần số dao động riêng [25].

Tiếp theo, Kaveh và cộng sự (2021) đã đề xuất một phiên bản làm giàu của thuật toán Forensic-Based Investigation (FBI) được gọi là Enhanced Forensic-Based Investigation (EFBI) bằng cách biến đổi công thức ban đầu của thuật toán FBI [9]. Từ kết quả mà tác giả đã sử dụng EFBI để giảm trọng lượng mái vòm với ràng buộc tần số dao động riêng cho thấy rằng EFBI đã thể hiện sự vượt trội hơn so với thuật toán FBI tiêu chuẩn, ngoài ra nó còn có hiệu suất hơn hoặc tương tự metaheuristic khác trong việc giải quyết các bài toán kết cấu tương tự. Ở trường hợp khác, thuật toán lai Adaptive Hybrid Evolutionary Firefly Algorithm (AHEFA) là sự kết hợp giữa thuật toán tiến hóa vi phân (DE) và thuật toán đom đóm (FFA) được đề xuất bởi Lieu và cộng sự (2018), dùng để tối ưu hóa hình dạng và kích thước của giàn với điều kiện tần số dao động riêng. Kết quả chỉ ra rằng sự hội tụ của AHEFA nhanh hơn đáng kể so với DE, FFA và nhiều phương pháp tiếp cận trong tài liệu, và độ chính xác của nó tốt hơn so với nhiều phương pháp [26].

Thêm vào đó, Vanshaj và cộng sự (2023) đã áp dụng thuật toán Jellyfish Search (JS) nhằm giải quyết bài toán tối ưu hóa bộ giảm chấn (TMD) của kết cấu cao tầng chịu tác động của động đất. Từ kết quả của tác giả có thể thấy JS tỏ ra rất hiệu quả để thiết kế thiết bị TMD và thể hiện sự vượt trội hơn các thuật toán Shepherd Optimization Algorithm (SSO) và thuật toán Genetic Algorithm (GA) [27]. Đặc biệt, thuật toán JS là một thuật toán dựa trên trí thông minh bầy đàn có ưu điểm hơn các thuật toán khác và có thể xử lý đa phương thức dựa trên nghiên cứu của Chou và Truong (2021) [7, 28]. JS vượt trội hơn các thuật toán được so sánh với tốc độ hội tụ và thời gian tính toán [7], nên JS rất thuận tiện cho các ứng dụng khác nhau. Do đó, JS được nghiên cứu tích hợp với phương pháp phần tử hữu hạn để tối ưu trọng lượng kết cấu với điều kiện tần số dao động riêng trong nghiên cứu này.

Phần còn lại của nghiên cứu này được tổ chức như sau. Phần 2 trình bày cơ sở lý thuyết, bao gồm thuật toán JS, phương pháp phần tử hữu hạn, hàm phạt và mô hình tích hợp JS với phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Phần 3 trình bày các áp dụng của JS-FEM để tối ưu hóa bài toán giàn và kết luận ở phần 4 của bài báo.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1 Thuật toán Jellyfish Search

Chou và Truong đã phát triển thuật toán tối ưu lấy cảm hứng từ hành vi chuyển động của con sứa trong đại dương được đặt tên là Jellyfish Search [7, 29]. Chuyển động của sứa trong đại dương bao gồm sự di chuyển theo dòng hải lưu và di chuyển bên trong đàn sứa. Việc di chuyển theo dòng hải lưu được mô phỏng là giai đoạn khám phá, chuyển động trong đàn sứa được xem là giai đoạn khai thác và hệ thống kiểm soát thời gian chuyển đổi giữa các giai đoạn này [7, 29]. Trong giai đoạn đầu, xác suất khám phá vượt qua xác suất khai thác và hệ thống kiểm soát thời gian kích hoạt thuật toán tìm các khu vực có khả năng chứa các vị trí tối ưu triển vọng. Theo thời gian, xác suất khai thác trở nên lớn hơn nhiều so với xác suất thăm dò và sứa xác định vị trí tốt nhất bên trong các khu vực đã xác định. Vào cuối vòng lặp, sứa tụ lại thành sứa hoa.

2.1.1 Dòng hải lưu

Sứa bị thu hút bởi dòng hải lưu, nơi chứa lượng lớn chất dinh dưỡng, \overrightarrow{trend} là hướng của dòng hải lưu. Dòng hải lưu được mô tả bởi (1).

$$\overrightarrow{trend} = X^* - \beta \times \text{rand}(0,1) \times \mu \quad (1)$$

trong đó: $\beta > 0$ là hệ số phân phối, Chou và Truong (2020) đã chỉ ra $\beta = 3$ cho kết quả tốt nhất trong các thí nghiệm số. Do đó, vị trí mới của mỗi con sứa được đưa ra bởi

$$X_i(t+1) = X_i(t) + \text{rand}(0,1) \times \overrightarrow{trend} \quad (2)$$

2.1.2 Bẫy sứa

Sứa nở hoa là một khối sứa lớn trong đó chúng di chuyển xung quanh vị trí của chúng (chuyển động thụ động, loại A) hoặc vị trí của một con khác (chuyển động chủ động, loại B) [30, 31]. Hầu hết sứa biểu hiện chuyển động loại A khi đàn vừa được hình thành, theo thời gian chúng ngày càng thể hiện chuyển động loại B. Loại A là chuyển động của sứa xung quanh vị trí của chúng và vị trí cập nhật tương ứng của mỗi con sứa được thể hiện bởi (3)

$$X_i(t+1) = X_i(t) + \gamma \times \text{rand}(0,1) \times (U_b - L_b) \quad (3)$$

trong đó: U_b và L_b lần lượt là biên trên và biên dưới của không gian tìm kiếm; và $\gamma > 0$ là hệ số chuyển động, Chou và Truong chỉ ra $\gamma = 0.1$ dựa trên kết quả phân tích trong các thí nghiệm.

Tiếp theo, phương trình (6) và (7) mô phỏng hướng chuyển động và vị trí cập nhật của con sứa trong chuyển động loại B,

$$\overrightarrow{Step} = X_i(t+1) - X_i(t) \quad (4)$$

$$\text{trong đó: } \overrightarrow{Step} = \text{rand}(0,1) \times \overrightarrow{Direction} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{Direction} = \begin{cases} X_j(t) - X_i(t) & \text{if } f(X_i) \geq f(X_j) \\ X_i(t) - X_j(t) & \text{if } f(X_i) < f(X_j) \end{cases} \quad (6)$$

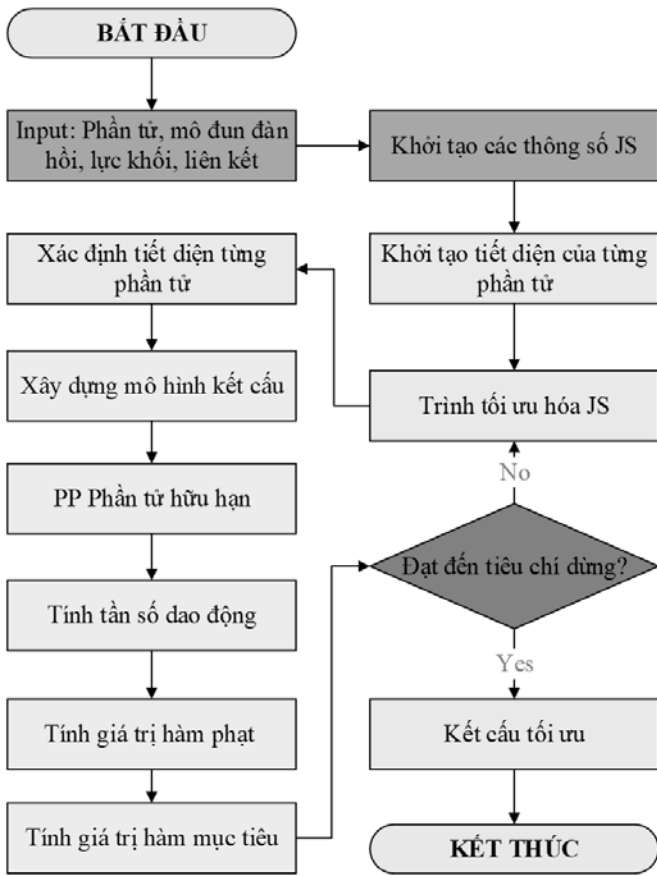
$$\text{Do đó, } X_i(t+1) = X_i(t) + \overrightarrow{Step} \quad (7)$$

Cơ chế kiểm soát thời gian để xác định loại chuyển động theo thời gian. Nó không chỉ kiểm soát các chuyển động loại A và loại B trong một bầy mà còn kiểm soát cả chuyển động của sứa đối với dòng hải lưu.

2.1.3 Cơ chế kiểm soát thời gian

Sứa bị thu hút bởi lượng thức ăn được chứa trong dòng hải lưu [32]. Theo thời gian, bầy sứa được tạo thành bởi nhiều con sứa tập hợp lại với nhau. Sứa trong bầy di chuyển sang dòng hải lưu khác và bầy sứa khác khi dòng hải lưu bị thay đổi bởi nhiệt độ hoặc gió. Chuyển động của sứa bên trong bầy được gọi là loại A (chuyển động thụ động) và loại B (chuyển động chủ động). Ngay từ đầu loại A được ưa chuộng; thời gian trôi qua, loại B ngày càng được ưa chuộng.

Hàm điều khiển thời gian được hình thành bởi phương trình (8). Khi giá trị của nó vượt quá C_0 , con sứa đi theo dòng hải lưu. Khi giá trị của nó nhỏ hơn C_0 , chúng di chuyển vào bên trong bầy đàn. C_0 , được đặt thành 0,5, là giá trị trung bình của 0 và 1.



Hình 1. Lưu đồ của JS-FEM

$$c(t) = \left[\left(1 - \frac{t}{Max_{iter}} \right) \times (2 \times rand(0,1) - 1) \right] \quad (8)$$

trong đó: t là thời gian, được chỉ định kể từ lần lặp thứ t và Max_{iter} biểu thị số lần lặp tối đa, là tham số khởi tạo.

Giống như c(t), hàm 1-c(t) dùng để mô phỏng chuyển động của một con sứa trong đàn (loại A hoặc B). Con sứa thể hiện chuyển động loại A khi rand(0,1) vượt quá (1-c(t)). Con sứa thể hiện chuyển động loại B khi khi rand(0,1) nhỏ hơn (1-c(t)).

2.2 Phương pháp phần tử hữu hạn

Bài toán tối ưu hóa kích thước của kết cấu mái vòm được xây dựng dưới dạng toán học như sau [22, 37]. Tìm {a} = [a₁, a₂, ..., a_d] sao cho

$$Cực\ tiểu\ hóa\ f_{cost}(\{a\}) = \sum_{i=1}^d a_i \sum_{j=1}^{nm(i)} \rho_j L_j \quad (10)$$

Với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} \omega_j \geq \omega_j^* \text{ đối với tần số dao động tự nhiên } j \\ \omega_k \geq \omega_k^* \text{ đối với tần số dao động tự nhiên } k \\ a_i^{min} \leq a_i \leq a_i^{max} \quad i = 1, 2, \dots, d \end{cases} \quad (11)$$

trong đó: $f_{cost}(\{a\})$ là hàm mục tiêu, là trọng lượng của kết cấu; a là vectơ các biến thiết kế, là tiết diện của các cấu kiện; d là số lượng các biến thiết kế kích thước; nm là số phần tử kết cấu; a_i, ρ_i và L_i lần lượt là diện tích mặt cắt ngang, khối lượng riêng vật liệu và chiều dài của cấu kiện thứ i; a_i^{min} và a_i^{max} lần lượt là biên dưới và biên trên của biến thiết kế thứ i; ω_j và ω_j^{*} lần lượt là tần số dao động riêng thứ j của kết cấu và biên dưới tương ứng của nó; ω_k và ω_k^{*} lần lượt là tần số dao động riêng thứ k của kết cấu và biên trên tương ứng của nó.

Giải pháp cho phương trình đại số sau đây để xác tần số dao

động riêng của kết cấu

$$k\phi_n = \omega_n^2 m \phi_n \quad (12)$$

trong đó: k và m tương ứng là ma trận độ cứng và khối lượng của kết cấu; ω_n là tần số dao động riêng thứ n của kết cấu; φ_n là dạng dao động riêng thứ n của kết cấu; và n là số bậc tự do của kết cấu (n = 1, 2, ..., N).

2.3 Phương pháp hàm phạt

Trong số các cách tiếp cận khác nhau để xử lý các ràng buộc trong các bài toán tối ưu hóa, một trong những cách phổ biến nhất là xử phạt [17, 38, 39].

$$Cực\ tiểu\ hóa\ F(\{a\}) = f_{cost}(\{a\}) \times f_p(\{a\}) \quad (13)$$

trong đó: F({a}) là hàm mục tiêu bị phạt và f_p({a}) là hàm phạt. Degertekin và cộng sự đã đề xuất một hàm phạt f_p({a}) để để ràng buộc hàm mục tiêu f_{cost}({a}) [9, 40].

$$f_p(\{a\}) = (1 + \phi)^E \quad (14)$$

trong đó: φ là tổng các hình phạt

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{t}{Max_{iter}} \right) \quad (15)$$

Giá trị ban đầu ε₀ có thể được đặt trong khoảng từ 1,001 đến 10.000 và được đặt thành 2 ở đây [41].

2.4 Sơ đồ tích hợp JS-FEM

Phương pháp phần tử hữu hạn được dùng để phân tích các kết cấu trong nghiên cứu này và để tìm ra các giải pháp tối ưu thì thuật toán JS đã được áp dụng nhằm giảm thiểu trọng lượng trong mỗi bài toán kết cấu. Hình 1 trình bày quy trình tối ưu kết cấu theo tích hợp JS-FEM, và hàm phạt để kiểm tra điều kiện ràng buộc thành mô hình để ứng dụng trong nghiên cứu này.

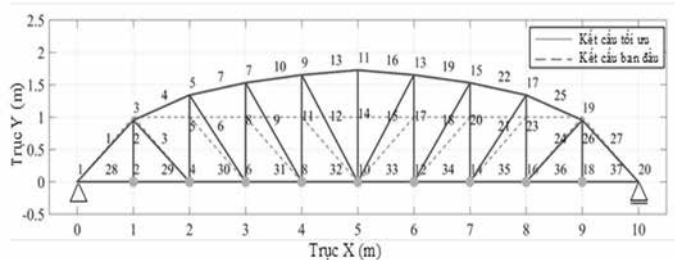
3. KẾT QUẢ SỐ

Phần này trình bày áp dụng mô hình JS-FEM để tối ưu trọng lượng kết cấu, bao gồm giàn 37 thanh, 72 thanh và hệ vòm 600 thanh với điều kiện ràng buộc tần số dao động riêng.

3.1 Giàn phẳng 37 thanh

Bài toán thứ nhất liên quan đến việc cực tiểu hóa trọng lượng của giàn 37 thanh được mô tả trong hình 2. Các khối lượng 10 kg được thêm vào tại mỗi nút của biên dưới. Vật liệu có mô đun đàn hồi E = 210 GPa và khối lượng riêng ρ = 7800 kg/m³. Bài toán xem xét các biến thiết kế là kích thước và hình dạng và tính đối xứng kiểm soát bởi trục giữa đường nối các nút 10 và 11. Các thanh của biên dưới (giữa các nút 1 và 20) có diện tích mặt cắt không đổi và được xác định trước là 0.4 cm².

Các nút của biên trên có tọa độ của chúng dưới dạng các biến thiết kế hình dạng theo hướng thẳng đứng. Không gian tìm kiếm cho các biến thiết kế kích thước có thể được chọn từ khoảng [1, 10] cm². Do đó, có tổng cộng 19 biến thiết kế trong đó 5 biến dành cho hình dạng và 14 biến dành cho kích thước. Các tần số dao động riêng phải thỏa mãn các giới hạn sau: f₁ ≥ 20 Hz, f₂ ≥ 40 Hz và f₃ ≥ 60 Hz. Số lượng dân số và số lần lặp đối với JS-FEM được thiết lập tương ứng là 50 và 480, như vậy số lần phân tích kết cấu là 24,000. Kết quả cho trong bảng 1.



Hình 2. Kết cấu tối ưu giàn 37 thanh.

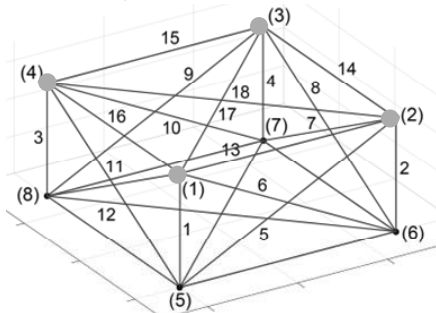
Bảng 1: Kết quả tối ưu cho giàn 37 thanh. Diện tích mặt cắt ngang tính bằng (cm²) và tọa độ nút tính bằng mét

Biến phân tích	Wang et al. (2004) [42] ENSM	Lingyun et al. (2005) [6] GA	Gomes (2011) [20] PSO	Kaveh & Javadi (2014) [43] HRPSO	Kaveh & Zolghadr (2011) [44] CSS	Kaveh & Zolghadr (2014) [3] DPSO	Kaveh & et al. (2015) [45] DEO	Carvalho et al. (2018) [46] PSO	Carvalho et al. (2018) [46] CRPSO	JS (2023)
A ₁ ,A ₂₇	3.250	2.893	2.679	2.851	2.908	2.620	2.7	3.8	3.0	2.959
A ₂ ,A ₂₆	1.236	1.120	1.156	1.000	1.021	1.039	1.0	1.0	1.0	1.003
A ₃ ,A ₂₄	1.000	1.000	2.347	1.834	1.036	1.046	1.0	1.0	1.0	1.000
A ₄ ,A ₂₅	2.538	1.865	1.718	1.887	3.914	2.716	2.4	2.7	2.6	2.626
A ₅ ,A ₂₃	1.371	1.596	1.275	1.062	1.002	1.025	1.2	1.0	1.0	1.195
A ₆ ,A ₂₁	1.368	1.264	1.481	1.802	1.216	1.508	1.2	1.0	1.2	1.213
A ₇ ,A ₂₂	2.429	1.825	4.685	1.933	2.714	2.375	2.2	3.7	2.6	2.452
A ₈ ,A ₂₀	1.652	2.009	1.124	1.249	1.266	1.449	1.3	1.5	1.2	1.365
A ₉ ,A ₁₈	1.825	1.952	2.121	1.874	1.8006	1.449	1.9	1.9	1.6	1.556
A ₁₀ ,A ₁₉	2.302	1.970	3.860	1.957	4.027	2.532	2.2	1.9	2.5	2.506
A ₁₁ ,A ₁₇	1.310	1.829	2.981	1.244	1.336	1.235	1.3	1.6	1.0	1.192
A ₁₂ ,A ₁₅	1.406	1.235	1.202	1.777	1.054	1.352	1.4	1.0	1.3	1.314
A ₁₃ ,A ₁₆	2.189	1.404	1.256	1.806	2.811	2.914	2.5	2.0	2.7	2.441
A ₁₄	1.000	1.000	3.327	1.000	1.170	1.008	1.0	1.0	1.0	1.000
Y ₃ ,Y ₁₉	1.208	1.199	0.963	1.0744	0.872	0.948	1.04	1.281	0.877	0.952
Y ₅ ,Y ₁₇	1.578	1.655	1.397	1.495	1.212	1.343	1.40	1.862	1.267	1.340
Y ₇ ,Y ₁₅	1.671	1.965	1.592	1.732	1.382	1.504	1.64	2.000	1.455	1.531
Y ₉ ,Y ₁₃	1.770	2.073	1.881	1.894	1.470	1.635	1.74	2.000	1.583	1.652
Y ₁₁	1.850	2.305	2.085	1.969	1.568	1.718	1.84	2.000	1.662	1.727
Tần số dao động riêng										
f ₁ (Hz)	20.085	20.001	20.000	20.000	20.000	20.019	20.033	21.297	20.004	20.000
f ₂ (Hz)	42.074	40.030	40.000	40.016	40.069	40.011	40.346	40.699	40.000	40.000
f ₃ (Hz)	62.938	60.000	60.000	60.010	60.698	60.000	60.064	61.259	60.043	60.000
W (kg)	366.50	368.84	377.20	364.72	362.84	360.40	361.03	370.502	358.007	359.799
NSA	–	8000	–	24000	–	–	24,000	24,000	24,000	24,000

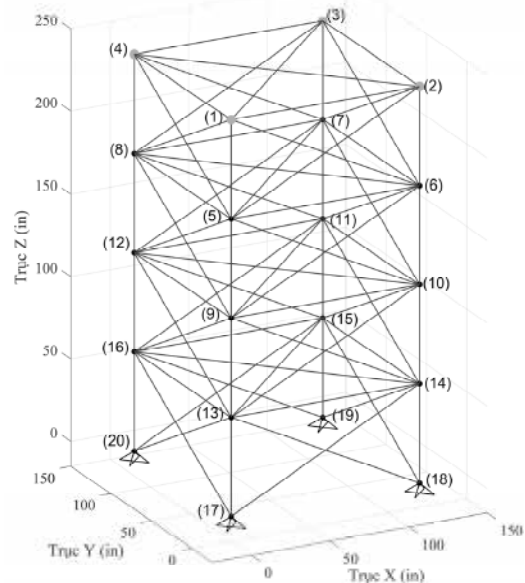
NSA: Số lần phân tích kết cấu (Number of structural analysis)

3.2 Giàn không gian 72 thanh

Bài toán thứ hai tương ứng với việc giảm thiểu trọng lượng của giàn 72 thanh được mô tả trong hình 3 và 4. Khối lượng 2270kg (5000 lbs) được thêm vào tại bốn nút ở trên cùng của giàn. Vật liệu có mô đun đàn hồi E = 68.9 GPa và khối lượng riêng ρ = 2770 kg/m³. Việc tìm kiếm riêng biệt cho các biến thiết kế kích thước có thể được chọn từ khoảng [0.645, 50] cm². Các tần số dao động riêng có giới hạn f₁ ≥ 4 Hz và f₃ ≥ 6 Hz. Số lượng dân số và số lần lặp đối với JS-FEM được thiết lập tương ứng là 50 và 540, như vậy số lần phân tích kết cấu là 27,000. Kết quả chi tiết được trình bày ở bảng 2.



Hình 3. Giàn 72 thanh - mô-đun mẫu



Hình 4. Giàn 72 thanh

Bảng 2: Kết quả tối ưu cho giàn 72 thanh. Diện tích mặt cắt tính bằng cm²

Biến phân tích	Konzelman (1986) [47] DM	Sedaghati (2005) [48] FM	Gomes (2011) [20] PSO	Kaveh and Zolghadr (2012) [21] CSS-BBBC	Kaveh et al. (2015) [45] DEO	al.Carvalho et al. (2018) [46] PSO	al.Carvalho et al. (2018) [46] CRPSO	al. JS (2023)
A ₁ -A ₄	3.499	3.499	2.987	3.949	3.60	8.800	3.700	3.440
A ₅ -A ₁₂	7.932	7.932	7.749	7.968	8.100	8.000	8.000	7.870
A ₁₃ -A ₁₆	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645
A ₁₇ -A ₁₈	0.645	0.645	0.645	0.647	0.645	0.645	0.645	0.645
A ₁₉ -A ₂₂	8.056	8.056	8.765	7.525	8.85	24.000	8.000	7.978
A ₂₃ -A ₃₀	8.011	8.011	8.153	7.863	8.50	7.800	7.900	7.932
A ₃₁ -A ₃₄	0.645	0.645	0.645	0.645	0.70	0.645	0.645	0.645
A ₃₅ -A ₃₆	0.645	0.645	0.645	0.652	0.645	0.645	0.645	0.645
A ₃₇ -A ₄₀	12.812	12.812	13.450	12.966	11.850	14.000	13.100	12.694
A ₄₁ -A ₄₈	8.061	8.061	8.073	8.347	8.10	6.200	7.900	7.967
A ₄₉ -A ₅₂	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	2.600	0.645	0.645
A ₅₃ -A ₅₄	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645
A ₅₅ -A ₅₈	17.279	17.279	16.684	17.389	17.60	15.900	16.800	17.090
A ₅₉ -A ₆₆	8.088	8.088	8.159	8.006	7.55	12.600	8.300	7.981
A ₆₇ -A ₇₀	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645
A ₇₁ -A ₇₂	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645	0.645
Tần số dao động riêng								
f ₁ (Hz)	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.219	4.000	4.000
f ₃ (Hz)	6.000	6.000	6.000	6.000	6.0080	6.034	6.004	6.000
W (kg)	327.605	327.605	328.823	328.589	329.422	391.864	328.215	324.229
NSA	-	-	-	-	27,000	27,000	27,000	27,000

NSA: Số lần phân tích kết cấu (Number of structural analysis)

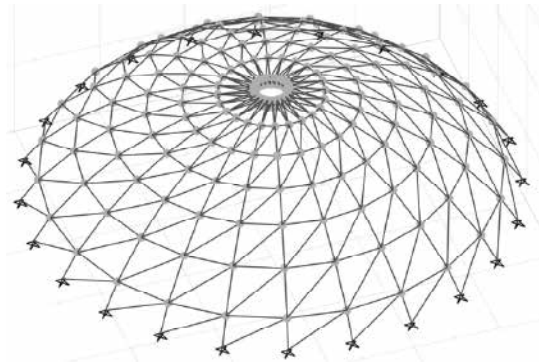
3.3 Mái vòm 600 thanh

Bài toán cuối cùng được trình bày trong Kaveh và Ghazaan [23] và Hình 5 và 6 thể hiện hình ảnh kết cấu mái vòm 600 thanh. Mái vòm có đường kính 13 mét và cao 7,5 mét. Mỗi thanh của kết cấu được coi là một biến thiết kế kích thước đưa đến bài toán tối ưu với 25 biến. Mô đun đàn hồi $E=200$ GPa và khối lượng riêng $\rho = 7850$ kg/m³ và các nút ở dưới của mái vòm được liên kết bởi các khớp (tọa độ $z = 0$). Khối lượng 100 kg được thêm vào tại tất cả các nút tự do. Không gian tìm kiếm riêng biệt cho bài toán này được xác định trong khoảng [1, 100] cm². Các giới hạn đối tần số dao động riêng là $f_1 \geq 5$ Hz và $f_3 \geq 7$ Hz. Số lượng dân số và số lần lặp đối với JS-FEM được thiết lập tương ứng là 50 và 300, như vậy số lần phân tích kết cấu là 15,000. Kết quả trình bày ở bảng 3.

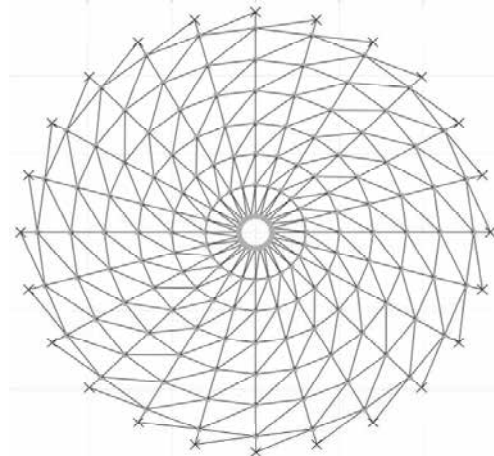
4. PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

4.1 Giàn 37 thanh

Kết quả tối ưu hóa trọng lượng cho giàn 37 thanh của thuật toán JS-FEM được trình bày ở bảng 1. Nhìn tổng thể có thể thấy sự phân chia của 3 nhóm kết quả khác nhau. Nhóm thuật toán cho ra kết quả tối ưu tốt nhất trong đó có JS-FEM cho ra kết quả với trọng lượng giàn 359.799kg tốt hơn so với các nghiên cứu của Kaveh và cộng sự [3, 43-45] với các kết quả lần lượt 360.4kg, 361.03kg, 362.84kg và 364.72kg, chỉ sau CRPSO với 358.007kg của Carvalho và cộng sự [46] đã sử dụng NSA cao nhất (24,000). JS-FEM tỏ ra hiệu quả hơn các kết quả của Wang và cộng sự [42] và Lingyun và cộng sự [6] đã sử dụng NSA thấp nhất với trọng lượng lần lượt là 366.5kg và 368.84kg. Và cuối cùng, JS-FEM cho thấy ưu việt so với PSO của Carvalho và cộng sự [46] và của Gomes [20] với trọng lượng lần lượt là 370.502kg và 377.2kg. Vì vậy, từ so sánh trên, JS-FEM tỏ ra hiệu quả trong tối ưu trọng lượng cho giàn 37 thanh với ràng buộc tần số dao động riêng với NSA cùng số lần lặp là 24,000.



Hình 5. Phối cảnh mái vòm giàn 600 thanh



Hình 6. Mặt bằng mái vòm giàn 600 thanh

Bảng 3: Kết quả tối ưu cho của mái vòm giàn 600 thanh. Diện tích mặt cắt tính bằng cm²

Biến phân tích	Kaveh & M. Ilchi (2016) [23] ECBO-Cascade	Kaveh (2017) [49] DPSO	Kaveh & M. Ilchi (2017) [50] VPS	Kaveh & M. Ilchi (2018) [51] MDVC-UVPS	Degertekin et al. (2021) [52] PFJA	Kaveh et al. (2021) [9] EFBI	Kaveh et al. (2022) [39] ISMA	Truong & Chou (2023) [53] FAFBI	JS (2023)
a ₁	(1-2)	1.0299	1.365	1.3030	1.2575	1.1867	1.0999	1.1035	1.1615
a ₂	(1-3)	1.3664	1.391	1.3998	1.3466	1.2967	1.4922	1.5801	1.3720
a ₃	(1-10)	5.1095	5.686	5.1072	4.9738	4.5771	6.0744	6.2180	5.0308
a ₄	(1-11)	1.3011	1.511	1.3882	1.4025	1.3356	1.6234	1.0522	1.3215
a ₅	(2-3)	17.0572	17.711	16.9217	17.3802	18.3157	17.4918	17.1566	17.1538
a ₆	(2-11)	34.0764	36.266	38.1432	37.9742	38.5097	37.2118	36.5568	36.6623
a ₇	(3-4)	13.0985	13.263	11.8319	13.0306	13.5917	12.7873	12.8425	12.8320
a ₈	(3-11)	15.5882	16.919	16.6149	15.9209	16.8824	14.8239	15.3463	15.3304
a ₉	(3-12)	12.6889	13.333	11.3403	11.9419	13.8766	12.1764	11.9044	11.4956
a ₁₀	(4-5)	10.3314	9.534	9.3865	9.1643	9.5286	9.0163	9.4559	9.4473
a ₁₁	(4-12)	8.5313	9.884	8.7692	8.4332	9.4218	8.5044	8.1976	8.2741
a ₁₂	(4-13)	9.8308	9.547	9.6682	9.2375	9.7643	8.9951	9.0644	9.0583
a ₁₃	(5-6)	7.0101	7.866	6.9826	7.2213	7.2431	7.0357	7.6937	7.4797
a ₁₄	(5-13)	5.2917	5.529	5.4445	5.2142	5.3913	5.0993	5.1748	5.1459
a ₁₅	(5-14)	6.275	7.007	6.3247	6.7961	6.7468	6.1918	6.7264	6.6681
a ₁₆	(6-7)	5.4305	5.462	5.1349	5.2078	5.1493	4.9514	4.8059	4.9264
a ₁₇	(6-14)	3.6414	3.853	3.3991	3.4586	3.8342	3.9186	3.6390	3.5924
a ₁₈	(6-15)	7.2827	7.432	7.7911	7.6407	8.0665	7.6312	7.7180	7.6879
a ₁₉	(7-8)	4.4912	4.261	4.4147	4.369	4.2800	4.4271	4.0911	4.1349
a ₂₀	(7-15)	1.9275	2.253	2.2755	2.1237	2.2509	2.3280	2.1339	2.1482
a ₂₁	(7-16)	4.6958	4.337	4.9974	4.5774	4.5372	4.8534	4.4482	4.6172
a ₂₂	(8-9)	3.3595	4.028	4.0145	3.4564	3.5615	3.9632	3.4785	3.5875
a ₂₃	(8-16)	1.7067	1.954	1.8388	1.792	1.7744	1.8527	1.8191	1.8384
a ₂₄	(8-17)	4.8372	4.709	4.7965	4.8264	4.6445	4.7818	4.8903	4.9203
a ₂₅	(9-17)	2.0253	1.41	1.5551	1.7601	1.6141	1.4354	1.7001	1.6606
W (Kg)	6,140.51	6,344.55	6,133.02	6,115.10	6,333.251	6,076.35	6,068.34	6,062.85	6,060.28
NSA	17,300	9,000	19,740	17,513	8,590	12,000	20,000	15,000	15,000
Tần số dao động riêng									
f ₁ (Hz)	5.001	5.000	5.0000	5.000	5.0011	5.0001	5.0003	5.0000	5.001
f ₃ (Hz)	7.001	7.000	7.0000	7.000	7.0000	7.0000	7.0002	7.0000	7.000

NSA: Số lần phân tích kết cấu (Number of structural analysis)

4.2 Giàn 72 thanh

Bảng 2 trình bày kết quả tối ưu cho giàn 72 thanh thu được bởi JS-FEM cùng với các thuật toán khác. Từ kết quả có thể thấy JS-FEM cho kết quả tốt với trọng lượng giàn là 324.229kg so với các thuật toán còn lại được xem xét trong nghiên cứu này. Ngược lại với bài toán trước, JS-FEM thể hiện được sự hiệu quả hơn so với thuật toán CRPSO với kết quả tối ưu trọng lượng là 328.215kg của Carvalho và cộng sự [46] với cùng số lần sử dụng NSA (27,000). Trong khi đó, thuật toán PSO của Carvalho và cộng sự [46] đã sử dụng NSA là 27,000 cho ra kết quả trọng lượng vẫn là 391.864kg thể hiện sự kém hiệu quả hơn hẳn JS-FEM. Mặt khác, Gomes [20] với trọng lượng lần lượt là 328.823kg, Konzelman [47] với 327.605kg, Sedaghati [48] với 327.605kg và các thuật toán của Kaveh và cộng sự [21, 45] với 328.589 kg và 329.422 kg đều cho ra chênh lệch kết quả tối ưu không quá lớn. Những kết quả này chỉ ra rằng JS-FEM là một công cụ hiệu quả để giải quyết bài toán tối ưu giàn 72 thanh với điều kiện tần số dao động riêng với NSA (27,000).

4.3 Mái vòm 600 thanh

Kết quả tối ưu hóa cho mái vòm 600 thanh thu được từ thuật toán JS-FEM và các phương pháp khác được so sánh trong bảng 3. JS-FEM cho ra trọng lượng với 6,060.28kg tốt hơn so với các thuật toán khác. Cùng sử

dụng NSA như nhau (15,000), JS-FEM cũng thể hiện sự hiệu quả cùng với FAFBI của Truong và Chou [53] với 6,062.85kg cho các kết quả tối ưu gần như tương đương. Thêm vào đó, Kaveh và cộng sự [39] đã sử dụng NSA cao hơn (20.000) hay Degertekin và cộng sự [52] sử dụng NSA thấp nhất (8,590) đều cho ra kết quả trọng lượng mái vòm nặng hơn so với kết quả thu được từ JS-FEM với lần lượt là 6,068.34kg và 6,333.521kg. Mặt khác, các nghiên cứu của Kaveh và Ilchi Ghazaan được thực hiện bằng các phương pháp khác nhau vào các năm 2016 [23] sử dụng NSA (17,300) với 6,140.51kg, năm 2017 [50] sử dụng NSA (19,740) với 6,133.02kg, năm 2018 [51] sử dụng NSA (17,513) với 6,115.10kg cho ra các kết quả về trọng lượng mái vòm 600 thanh cải thiện dần qua từng năm, nhưng đều nặng hơn so với JS-FEM. Trái ngược với các phương pháp trên thì DPSO của Kaveh [49] lại cho trọng lượng lớn nhất trong các thuật toán được nhắc đến trong bài toán này với trọng lượng là 6,344.55kg khi sử dụng NSA (9,000). Do đó, kết quả xác nhận rằng các ràng buộc tần số của thiết kế tối ưu mà JS-FEM thu được có thể giải quyết bài toán này một cách hiệu quả với NSA cũng 15,000 lần lặp.

5. KẾT LUẬN

Bài báo này đã tích hợp thuật toán tối ưu JS với phương pháp phần

từ hữu hạn FEM thành mô hình JS-FEM nhằm tối ưu trọng lượng kết cấu với ràng buộc tần số dao động riêng. JS-FEM áp dụng để tối ưu giàn 37 thanh, giàn 72 thanh, giàn vòm 600 thanh. Trọng lượng tốt nhất được tìm kiếm bằng JS-FEM của thiết kế giàn 37 thanh, giàn 72 thanh, giàn vòm 600 thanh lần lượt là 359.799kg, 324.229kg và 6.060.28kg. Tất cả kết quả này được khảo sát với số lượng lần phân tích kết cấu nhỏ hơn hoặc tương đương đều tốt hơn các kết quả từ các nghiên cứu gần đây. Vì vậy, JS-FEM là mô hình tốt và có tính hiệu quả cao để giải quyết các vấn đề tối ưu hóa trong kỹ thuật kết cấu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Grandhi, R., *Structural optimization with frequency constraints - A review*. AIAA Journal, 1993. **31**(12): p. 2296-2303.
- Kaveh, A. and A. Zolghadr, *Comparison of nine meta-heuristic algorithms for optimal design of truss structures with frequency constraints*. Advances in Engineering Software, 2014. **76**: p. 9-30.
- Kaveh, A. and A. Zolghadr, *Democratic PSO for truss layout and size optimization with frequency constraints*. Computers & Structures, 2014. **130**: p. 10-21.
- Lemonge, A.C.C., et al., *Multi-objective truss structural optimization considering natural frequencies of vibration and global stability*. Expert Systems with Applications, 2021. **165**: p. 113777.
- Kaveh, A., K.B. Hamedani, and M. Kamalinejad, *Set theoretical variants of the teaching-learning-based optimization algorithm for optimal design of truss structures with multiple frequency constraints*. Acta Mechanica, 2020. **231**(9): p. 3645-3672.
- Lingyun, W., et al., *Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on genetic algorithm*. Computational Mechanics, 2005. **35**(5): p. 361-368.
- Chou, J.-S. and D.-N. Truong, *A novel metaheuristic optimizer inspired by behavior of jellyfish in ocean*. Applied Mathematics and Computation, 2021. **389**: p. 125535.
- Houssein, E.H., et al., *Lévy flight distribution: A new metaheuristic algorithm for solving engineering optimization problems*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020. **94**: p. 103731.
- Kaveh, A., K.B. Hamedani, and M. Kamalinejad, *An enhanced Forensic-Based Investigation algorithm and its application to optimal design of frequency-constrained dome structures*. Computers & Structures, 2021. **256**: p. 106643.
- Kumar, S., et al., *MOTEO: A novel physics-based multiobjective thermal exchange optimization algorithm to design truss structures*. Knowledge-Based Systems, 2022. **242**: p. 108422.
- Kumar, S., et al., *Multi-objective teaching-learning-based optimization for structure optimization*. Smart Science, 2022. **10**(1): p. 56-67.
- Singh, P., R. Kottath, and G.G. Tejani, *Ameliorated Follow The Leader: Algorithm and Application to Truss Design Problem*. Structures, 2022. **42**: p. 181-204.
- Zhao, S., et al., *Dandelion Optimizer: A nature-inspired metaheuristic algorithm for engineering applications*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2022. **114**: p. 105075.
- Kumar, S., et al., *Multi-Objective Passing Vehicle Search algorithm for structure optimization*. Expert Systems with Applications, 2021. **169**: p. 114511.
- Kumar, S., et al., *Multiobjective structural optimization using improved heat transfer search*. Knowledge-Based Systems, 2021. **219**: p. 106811.
- Yang, X.-S., *Nature-inspired metaheuristic algorithms*. 2010: Luniver press.
- Kumar, S., et al., *A Decomposition based Multi-Objective Heat Transfer Search algorithm for structure optimization*. Knowledge-Based Systems, 2022. **253**: p. 109591.
- Yang, Y., et al., *An opposition learning and spiral modelling based arithmetic optimization algorithm for global continuous optimization problems*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2022. **113**: p. 104981.
- Zhang, Y.-J., et al., *Self-adaptive classification learning hybrid JAYA and Rao-1 algorithm for large-scale numerical and engineering problems*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2022. **114**: p. 105069.
- Gomes, H.M., *Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm*. Expert Systems with Applications, 2011. **38**(1): p. 957-968.
- Kaveh, A. and A. Zolghadr, *Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability*. Computers & Structures, 2012. **102-103**: p. 14-27.
- Khatibinia, M. and S. Sadegh Naserlavi, *Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on orthogonal multi-gravitational search algorithm*. Journal of Sound and Vibration, 2014. **333**(24): p. 6349-6369.
- Kaveh, A. and M. Ilchi Ghazaan, *Optimal design of dome truss structures with dynamic frequency constraints*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016. **53**(3): p. 605-621.
- Ho-Huu, V., et al., *An improved differential evolution based on roulette wheel selection for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints*. Neural Computing and Applications, 2018. **29**(1): p. 167-185.
- Kaveh, A. and A. Zolghadr, *Optimal design of cyclically symmetric trusses with frequency constraints using cyclical parthenogenesis algorithm*. Advances in Structural Engineering, 2018. **21**(5): p. 739-755.
- Lieu, Q.X., D.T.T. Do, and J. Lee, *An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints*. Computers & Structures, 2018. **195**: p. 99-112.
- Vanshaj, K., et al., *Jellyfish search optimization for tuned mass dampers for earthquake oscillation of elevated structures including soil-structure interaction*. Asian Journal of Civil Engineering, 2023. **24**(3): p. 779-792.
- Chou, J.-S. and D.-N. Truong, *Multiobjective optimization inspired by behavior of jellyfish for solving structural design problems*. Chaos, Solitons & Fractals, 2020. **135**: p. 109738.
- Chou, J.-S. and N.-M. Nguyen, *FBI inspired meta-optimization*. Applied Soft Computing, 2020. **93**: p. 106339.
- Mariottini, G.L. and L. Pane, *Mediterranean Jellyfish Venoms: A Review on Scyphomedusae*. Marine Drugs, 2010. **8**(4): p. 1122-1152.
- Zavodnik, D., *Spatial aggregations of the swarming jellyfish Pelagia noctiluca (Scyphozoa)*. Marine Biology, 1987. **94**(2): p. 265-269.
- Fossette, S., et al., *A biologist's guide to assessing ocean currents: a review*. Marine Ecology Progress Series, 2012. **457**: p. 285-301.
- Xiang, T., X. Liao, and K.-w. Wong, *An improved particle swarm optimization algorithm combined with piecewise linear chaotic map*. Applied Mathematics and Computation, 2007. **190**(2): p. 1637-1645.
- Chou, J.-S. and N.-T. Ngo, *Modified firefly algorithm for multidimensional optimization in structural design problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017. **55**(6): p. 2013-2028.
- Chuang, L.-Y., S.-W. Tsai, and C.-H. Yang, *Chaotic catfish particle swarm optimization for solving global numerical optimization problems*. Applied Mathematics and Computation, 2011. **217**(16): p. 6900-6916.
- May, R.M., *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 1976. **261**: p. 459-467.
- Chopra, A.K., *Dynamics of structures*. 2007: Pearson Education India.
- Dede, T., et al., *Optimal design of dome structures with recently developed algorithm: Rao series*. Structures, 2022. **42**: p. 65-79.
- Kaveh, A., K. Biabani Hamedani, and M. Kamalinejad, *Improved slime mould algorithm with elitist strategy and its application to structural optimization with natural frequency constraints*. Computers & Structures, 2022. **264**: p. 106760.
- Degertekin, S.O., L. Lamberti, and I.B. Ugur, *Discrete sizing/layout/topology optimization of truss structures with an advanced Jaya algorithm*. Applied Soft Computing, 2019. **79**: p. 363-390.
- Degertekin, S.O., L. Lamberti, and I.B. Ugur, *Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm*. Applied Soft Computing, 2018. **70**: p. 903-928.
- Wang, D., W.H. Zhang, and J.S. Jiang, *Truss Optimization on Shape and Sizing with Frequency Constraints*. AIAA Journal, 2004. **42**(3): p. 622-630.
- Kaveh, A. and S.M. Javadi, *Shape and size optimization of trusses with multiple frequency constraints using harmony search and ray optimizer for enhancing the particle swarm optimization algorithm*. Acta Mechanica, 2014. **225**(6): p. 1595-1605.
- Kaveh, A. and A. Zolghadr, *Shape and size optimization of truss structures with frequency constraints using enhanced charged system search algorithm*. 2011.
- Kaveh, A., L. Jafari, and N. Farhoudi, *Truss optimization with natural frequency constraints using a dolphin echolocation algorithm*. 2015.
- Carvalho, J.P.G., et al., *Truss optimization with multiple frequency constraints and automatic member grouping*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018. **57**(2): p. 547-577.
- Konzelman, C.J., *Dual methods and approximation concepts for structural optimization*. 1986.
- Sedaghati, R., *Benchmark case studies in structural design optimization using the force method*. International Journal of Solids and Structures, 2005. **42**(21): p. 5848-5871.
- Kaveh, A., *Optimal Analysis and Design of Large-Scale Domes with Frequency Constraints*, in *Applications of Metaheuristic Optimization Algorithms in Civil Engineering*, A. Kaveh, Editor. 2017, Springer International Publishing: Cham. p. 257-279.
- Kaveh, A. and M. Ilchi Ghazaan, *Vibrating particles system algorithm for truss optimization with multiple natural frequency constraints*. Acta Mechanica, 2017. **228**(1): p. 307-322.
- Kaveh, A. and M. Ilchi Ghazaan, *A new hybrid meta-heuristic algorithm for optimal design of large-scale dome structures*. Engineering Optimization, 2018. **50**(2): p. 235-252.
- Degertekin, S.O., G. Yalcin Bayar, and L. Lamberti, *Parameter free Jaya algorithm for truss sizing-layout optimization under natural frequency constraints*. Computers & Structures, 2021. **245**: p. 106461.
- Truong, D.-N. and J.-S. Chou, *Fuzzy adaptive forensic-based investigation algorithm for optimizing frequency-constrained structural dome design*. Mathematics and Computers in Simulation, 2023. **210**: p. 473-531.