

Nghiên cứu bài toán tối ưu đa mục tiêu khung thép sử dụng phân tích trực tiếp

A study on multi-objective optimization of steel frames using direct analysis

> TS MAI SỸ HÙNG

Khoa Công trình thủy, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

TÓM TẮT

Kết cấu khung thép với độ bền và khả năng chịu lực vượt trội luôn được sử dụng rộng rãi trong công trình dân dụng hiện nay. Để tăng hiệu quả trong việc sử dụng dạng kết cấu này, bài báo trình bày bài toán tối ưu khung thép dựa trên nền tảng sử dụng phân tích trực tiếp để xét đến ứng xử phi tuyến tính phi đàn hồi của công trình. Hai hàm mục tiêu được xét đến đồng thời là tổng khối lượng và chuyển vị lệch tầng của công trình. Biến thiết kế là tiết diện dầm và cột của hệ khung được lựa chọn từ tập hợp tiết diện W theo tiêu chuẩn AISC-LRFD. Thuật toán tối ưu đa mục tiêu NSGA-II được sử dụng để giải bài toán tối ưu được xây dựng. Một ví dụ khung thép 2 tầng được xem xét để minh họa.

Từ khóa: Khung thép; tối ưu; NSGA; đa mục tiêu; phân tích trực tiếp.

ABSTRACT

Steel frame structures with outstanding durability and bearing capacity have been widely used in civil engineering. In order to increase the efficiency in using this structural type, this paper presents a steel frame optimization problem based on using direct analysis to consider the structural non-linear inelastic behavior. The two objective functions considered simultaneously are the total mass and the displacement of the structure. The design variables are the beam and column cross sections selected from the set of sections W according to AISC-LRFD standard. The NSGA-II multi-objective optimization algorithm is used to solve the built-in optimization problem. An example of a two-story steel frame is considered for illustration.

Keyword: Steel frame; optimization; NSGA; multi-Objective; advanced analysis.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các giải pháp tối ưu đang được ứng dụng ngày một rộng rãi trong nhiều lĩnh vực của đời sống bao gồm cả thiết kế kết cấu khung thép dân dụng. Ưu điểm chính của tối ưu là tiết kiệm được tài nguyên, tiền bạc, vật liệu và thời gian trong khi công năng của công trình vẫn được đảm bảo. Thông thường, bài toán tối ưu của khung thép được xây dựng dựa trên tối thiểu hóa tổng chi phí hoặc trọng lượng của kết cấu dưới các ràng buộc phức tạp khác nhau bao gồm khả năng xây dựng, các điều kiện về cường độ và sử dụng theo quy định của tiêu chuẩn. Biến thiết kế là các biến rời rạc của tiết diện ngang dầm và cột. Do những đặc điểm này, việc tối ưu thiết kế khung thép mang tính phi tuyến tính cao. Do đó, việc tìm kiếm các giải pháp tối ưu hoặc thậm chí gần tối ưu là rất khó. Thông thường, các giải pháp đủ tốt, gần với tối ưu nhưng không phải là tối ưu "thực", được chấp nhận. Trên cơ sở đó, các thuật toán meta-heuristic sử dụng các kỹ thuật tìm kiếm ngẫu nhiên và hiệu quả trong việc tìm nghiệm tối ưu toàn cục cho các bài toán tối ưu có tính chất phi tuyến và phi lồi cao được ưu tiên sử dụng. Kết quả của nhiều nghiên cứu gần đây cho thấy các thuật toán meta-heuristic hiệu quả với nhiều vấn đề tối ưu khác nhau, bao gồm tối ưu kết cấu giàn [1–3], tối ưu kết cấu khung thép [4–7], tối ưu

hóa thiết kế dựa trên độ tin cậy của kết cấu [8–10].

Trong bài toán thiết kế tối ưu thông thường, một hàm mục tiêu thường được lựa chọn để xem xét, cụ thể đối với bài toán tối ưu khung thép thì tổng khối lượng công trình được chọn để tối thiểu hóa. Tuy nhiên, trong thực tế, công trình được thiết kế cần phải thỏa mãn nhiều tiêu chí khác nhau và được xem xét dưới nhiều yếu tố tác động như là: vốn đầu tư, độ an toàn, tính hiệu quả, v.v. Để mô tả chính xác hơn, cũng như là cung cấp thông tin đầy đủ hơn xét đến các yếu tố này, nhiều hàm mục tiêu cần được xem xét đồng thời trong bài toán tối ưu. Khi nhiều hàm mục tiêu được xem xét đồng thời, chúng ta có bài toán tối ưu đa mục tiêu trong thiết kế công trình. Nghiệm tối ưu của lớp bài toán này không chỉ đơn thuần là một nghiệm nữa mà là một tập các nghiệm tạo thành tập nghiệm Pareto bao gồm các phương án thiết kế có chất lượng ngang nhau (không so sánh hơn kém được với nhau). Nhiều nghiên cứu về tối ưu đa mục tiêu cho kết cấu thép đã được xem xét như [2, 11–12]. Tuy nhiên, các nghiên cứu này chưa xét đến tính phi tuyến tính phi đàn hồi của khung thép.

Trong bài báo này, tác giả xây dựng bài toán tối ưu đa mục tiêu cho khung thép sử dụng phân tích trực tiếp. Tổng khối lượng và chuyển vị lệch tầng của khung được lựa chọn là hai

hàm mục tiêu của bài toán. Các điều kiện ràng buộc bao gồm khả năng xây dựng, các điều kiện về cường độ và sử dụng tương ứng với các tổ hợp tải trọng theo quy định của tiêu chuẩn thiết kế. Tiết diện dầm và cột là biến thiết kế được lựa chọn từ tập các tiết diện W của tiêu chuẩn AISC-LRFD. Thuật toán di truyền NSGA-II (Non-dominated sorting GA-II) [13] được sử dụng để giải quyết bài toán tối ưu đặt ra. Một ví dụ khung thép 2 tầng được xem xét để minh họa.

2. XÂY DỰNG BÀI TOÁN TỐI ƯU

2.1. Hàm mục tiêu

Hai hàm mục tiêu được xem xét trong nghiên cứu này là tổng khối lượng kết cấu và chuyển vị lệch tầng được thiết lập như sau:

$$\text{Min } f_1(X) = \rho \sum_{i=1}^d \left(A(x_i) \sum_{j=1}^{d_i} L_{ij} \right), \quad (1)$$

$$\text{Min } f_2(X) = \sqrt{\sum_{j=1}^N (\Delta_j)^2} \quad (2)$$

trong đó: d là số lượng biến thiết kế; $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ là vec-tơ biến thiết kế với x_i là số tự nhiên trong khoảng $[1, UB_i]$ thể hiện vị trí $A(x_i)$ trong bộ tiết diện sử dụng để thiết kế cho phần tử thứ i ; $A(x_i)$ là diện tích tiết diện ngang của biến thứ i ; UB_i là tổng số tiết diện trong bộ dữ liệu tiết diện cho trước dùng cho nhóm phần tử thứ i ; ρ khối lượng riêng của thép; d_i là số lượng thanh trong nhóm phần tử kết cấu thứ i ; L_{ij} là chiều dài của phần tử thứ j trong nhóm thứ i ; Δ_j là chuyển vị lệch tầng của tầng thứ j . Biến thiết kế trong bài toán tối ưu khung là các số tự nhiên biểu thị cho vị trí của loại tiết diện được sử dụng trong tập tiết diện cho trước.

2.2. Các điều kiện ràng buộc

a) Điều kiện ràng buộc về khả năng thi công: Do yêu cầu thực tế, tại mỗi mối nối cột với cột chiều cao tiết diện cột dưới phải lớn hơn chiều cao tiết diện cột trên. Ngoài ra, tại mỗi mối nối dầm với cột, bề rộng bản cánh của dầm phải nhỏ hơn bề rộng của cột nếu dầm được nối với bản cánh cột. Nếu dầm liên kết với bản bụng cột thì bề rộng bản cánh của dầm phải nhỏ hơn chiều cao bản bụng cột. Các ràng buộc về khả năng xây dựng này được thiết lập như sau:

$$C_{i,1}^{\text{con}}(X) = \left(\frac{D_c^{\text{uppercolumn}}}{D_c^{\text{lowercolumn}}} \right) - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_{c-c}, \quad (1)$$

$$C_{i,2}^{\text{con}}(X) = \left(\frac{b_{bf}}{b_{cf}} \right) - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_{b-c1}, \quad (2)$$

$$C_{i,3}^{\text{con}}(X) = \left(\frac{b_{bf2}}{T_c} \right) - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_{b-c2}, \quad (3)$$

Trong đó: n_{c-c} là số mối nối giữa cột với cột; n_{b-c1} là số mối nối giữa dầm với bản cánh của cột; n_{b-c2} là số mối nối giữa dầm với vách cột. $D_c^{\text{uppercolumn}}$ và $D_c^{\text{lowercolumn}}$ là chiều cao của cột phía trên và cột phía dưới. b_{bf} và b_{cf} là bề rộng của bản cánh dầm và cột. b_{bf2} và T_c là bề rộng của bản cánh dầm và chiều cao của vách cột.

b) Điều kiện ràng buộc về cường độ: Điều kiện này được xét tương ứng với tổ hợp tải trọng cường độ quy định trong tiêu chuẩn. Khi áp dụng phân tích trực tiếp, điều kiện này được thể

hiện thông qua so sánh giữa sức kháng của công trình R_j và tác động của tải trọng S_j như sau:

$$C_j^{\text{cd}}(X) = 1 - \frac{R_j}{S_j} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_{cd}, \quad (4)$$

n_{cd} là số tổ hợp tải trọng cường độ được xem xét. Ký hiệu $lf = \frac{R}{S}$ là hệ số chịu tải của công trình. Nếu hệ số này lớn hơn 1, công trình sẽ an toàn và ngược lại. Phương pháp phân tích trực tiếp để xác định lf tham khảo trong tài liệu [5].

c) Điều kiện ràng buộc về sử dụng: Điều kiện này được xét đến cho các tổ hợp trạng thái giới hạn sử dụng được quy định trong tiêu chuẩn. Trong bài báo này, điều kiện giới hạn về độ lệch tầng được xem xét như sau:

$$C_{k,l}^{\text{cv}} = \left| \frac{\Delta_{k,l}}{\Delta_{k,l}^u} \right| - 1 \leq 0 \quad k = 1, \dots, N, \quad (5)$$

trong đó l là tổ hợp giới hạn sử dụng thứ l được xem xét, N là số tầng của khung, $\Delta_{k,l}$ và $\Delta_{k,l}^u$ là chuyển vị lệch tầng và giá trị giới hạn tương ứng của tầng thứ k .

2.3. Chuyển đổi về bài toán tối ưu không có điều kiện ràng buộc

Phương pháp hàm phạt được sử dụng để chuyển đổi bài toán tối ưu đa mục tiêu có điều kiện ràng buộc ở trên sang bài toán tối ưu đa mục tiêu không có điều kiện ràng buộc như sau:

$$f_1^{\text{un}}(X) = f_1^{\text{un}}(X) \times (1 + \alpha_{cd}\beta_1 + \alpha_{sd}\beta_2 + \alpha_{sd}\beta_3), \quad (6)$$

$$f_2^{\text{un}}(X) = f_2^{\text{un}}(X) \times (1 + \alpha_{cd}\beta_1 + \alpha_{cd}\beta_2 + \alpha_{sd}\beta_3), \quad (7)$$

trong đó:

$$\beta_1 = \sum (\max(C_i^{\text{con}}, 0)); \beta_2 = \sum (\max(C_j^{\text{cd}}, 0)); \beta_3 = \sum \left(\sum_{j=1}^{nn} \max(C_{k,l}^{\text{sd}}, 0) \right) \quad (8)$$

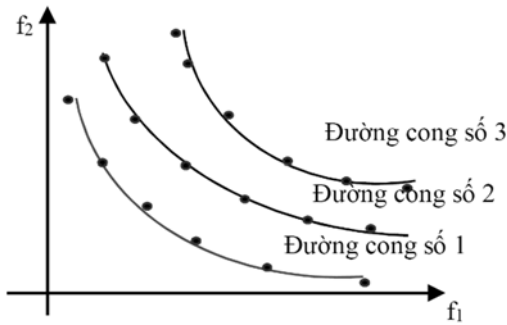
α_{cd} , α_{cd} và α_{sd} là các hệ số phạt tương ứng với vi phạm về điều kiện ràng buộc về khả năng xây dựng, cường độ và sử dụng. Các hệ số này được lấy với giá trị rất lớn nhằm làm cho giá trị hàm tối ưu bị tăng lên và qua đó sẽ bị loại bỏ trong quá trình tối ưu. Trong bài báo chúng được chọn bằng 10000.

Để giải quyết bài toán tối ưu ở trên, trong nghiên cứu này chúng ta sẽ sử dụng thuật toán tối ưu đa mục tiêu NSGA-II. Chi tiết nội dung của thuật toán này được trình bày ở phần tiếp theo.

3. THUẬT TOÁN TỐI ƯU NSGA-II

NSGA-II được đề xuất bởi Deb et al. [13] năm 2002 được coi là một trong những phương pháp tối ưu đa mục tiêu đầu tiên dựa trên thuật toán tiến hóa (EA). Về cơ bản, NSGA-II tuân theo cấu trúc chung của thuật toán di truyền GA lấy cảm hứng từ thuyết tiến hóa của Darwin. Trong GA, cá thể hoặc nhiễm sắc thể của quần thể tiếp theo được tạo ra từ bố mẹ "tốt" là cá thể/nhiễm sắc thể của quần thể hiện tại thông qua ba kỹ thuật cơ bản bao gồm đột biến, lai ghép và chọn lọc. Trong phiên bản GA truyền thống, một cá thể hoặc nhiễm sắc thể được trình bày ở dạng nhị phân với nhiều đơn vị riêng biệt được gọi là gen có giá trị 1 hoặc 0. Quá trình tạo ra các thế mới/con cái bắt đầu bằng cách chọn hai nhiễm sắc thể/bố mẹ từ quần thể hiện tại bằng cách sử dụng một quá trình lựa chọn để tìm ra cha mẹ tốt hơn từ quần thể hiện tại. Sau đó, cha mẹ được kết hợp bằng cách trao đổi thông tin di truyền. Kỹ thuật đột biến được áp dụng với tỉ lệ rất nhỏ bằng cách thay đổi giá trị của một số gen ở cá thể con để ngăn chặn sự hội tụ cục bộ.

Dựa trên nguyên lý chung của GA, NSGA-II được phát triển để giải quyết các bài toán tối ưu đa mục tiêu với hai kỹ thuật chính là xếp hạng nghiệm không trội và khoảng cách mật độ. Xếp hạng nghiệm không trội được sử dụng để sắp xếp các cá thể trong quần thể thành các lớp mà trong mỗi lớp thì các cá thể là không thống trị nhau, còn lớp trước sẽ thống trị các lớp sau. Đặc điểm này được minh họa trong Hình 1. Trong đó, quần thể được chia thành các lớp là đường cong số 1, 2 và 3. Các cá thể trên mỗi lớp được xem là tốt ngang nhau, còn cá thể ở lớp số 1 sẽ tốt hơn cá thể lớp số 2 và cá thể lớp số 2 sẽ tốt hơn cá thể ở lớp số 3. Các đường cong này còn được gọi là đường cong ưu thế. Khoảng cách mật độ là một cơ chế để phân loại cá thể được ưu tiên hơn trong cùng một lớp dựa trên nguyên tắc các cá thể ở xa nhau sẽ được ưu tiên hơn các cá thể nằm gần nhau nhằm đảm bảo tính đa dạng cho quần thể. Chi tiết về NSGA-II có thể tìm hiểu thêm trong tài liệu [13].



Hình 1. Các đường cong ưu thế

Các bước chính của thuật toán NSGA-II như sau:

Bước 1: Tạo ngẫu nhiên quần thể ban đầu P_0 .

Bước 2: Áp dụng các kỹ thuật đột biến và lai tạo như thuật toán GA cho quần thể P_0 để tạo ra quần thể mới Q .

Bước 3: Áp dụng kỹ thuật xếp hạng nghiệm không trội và khoảng cách mật độ cho quần thể $S = P_0 \cup Q$.

Bước 4: Chọn N cá thể tốt nhất của S thành lập nên quần thể P_1 .

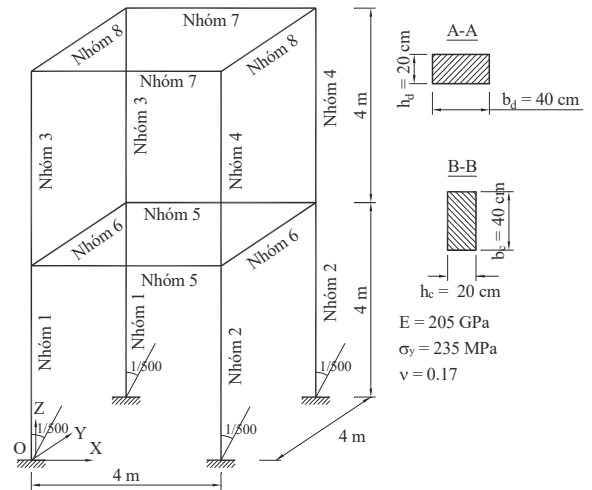
Bước 5: Lặp lại các bước từ 2-4 cho đến khi điều kiện dừng được thỏa mãn.

4. VÍ DỤ MINH HẠ

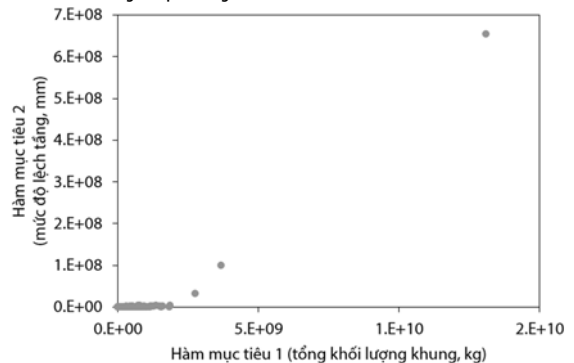
Xét khung thép không gian 2 tầng có kích thước hình học như trên Hình 2. Tiết diện của dầm và cột được phân loại thành tám nhóm và đây cũng là các biến thiết kế của quá trình tối ưu. Tập dữ liệu thiết kế cho cột bao gồm 97 tiết diện từ W10, W12, W14, W16 và cho dầm là 267 tiết diện từ W10 - W44 được lấy từ tập dữ liệu của tiêu chuẩn AISC-LRFD. Do đó, không gian thiết kế có nhiều hơn $6.52E+17$ hoán vị. Vật liệu thép là A992 có cường độ chảy 344.7 Mpa, mô đun đàn hồi 200000 Mpa, khối lượng riêng là 7.850 (kg/m³). Tải trọng tác dụng lên khung bao gồm: tải trọng gió là 50 kN theo hướng X tại các chiều cao tầng trên mặt trước của kết cấu. Tĩnh tải và hoạt tải là tải trọng phân bố theo phương thẳng đứng trên dầm, có giá trị lần lượt là 37.5 và 25 kN/m. Một tổ hợp cường độ và một tải trọng được xem xét, bao gồm $(1.2D+0.5L+1.6W)$ và $(1.0D+0.5L+0.7W)$. Trong đó, D , L và W lần lượt là tĩnh tải, hoạt tải và tải trọng gió. Giới hạn của chuyển vị lệch tầng là $h/400$. Các thông số của thuật toán NSGA-II gồm có: số biến thiết kế là 8, số lượng cá thể (NP) là 100, số thế hệ tối đa (MaxIteration) là 200.

Quá trình tối ưu được mô tả trong các Hình 2, 3 và 4. Hình 2 thể hiện giá trị hàm mục tiêu của quần thể ban đầu. Có thể thấy

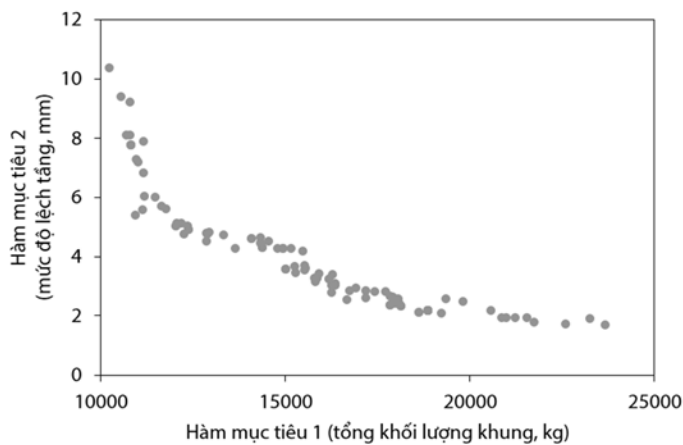
rằng, tại thời điểm ban đầu, các cá thể được tạo ngẫu nhiên từ tập tiết diện cho trước nên tất cả các cá thể đều vi phạm điều kiện ràng buộc. Điều này được thể hiện qua giá trị của 2 hàm mục tiêu của các cá thể đều rất lớn. Tuy nhiên, nhờ hiệu quả của kỹ thuật tối ưu NSGA-II, chất lượng của cá thể trong quần thể được nâng lên theo quá trình tiến hóa. Cụ thể, ở vòng tiến hóa thứ 10 được thể hiện trong Hình 3, ta có thể nhận thấy giá trị của 2 hàm mục tiêu so với quần thể ban đầu đã nhỏ đi rất nhiều. Ở vòng tiến hóa thứ 200 được thể hiện trong Hình 4, các cá thể đã hội tụ và tạo thành 1 đường cong Pareto là tập hợp nghiệm tối ưu cuối cùng tìm được của quá trình tối ưu. Từ kết quả tìm được trong Hình 4 ta có thể thấy rằng thuật toán NSGA-II đã rất hiệu quả khi các nghiệm tối ưu tìm được cuối cùng đều thỏa mãn các điều kiện ràng buộc. Bên cạnh đó, dạng tập hợp các nghiệm Pareto là dạng đường cong thể hiện trên Hình 4 cho thấy rằng mối quan hệ giữa 2 hàm mục tiêu là phi tuyến và nghịch nhau. Khi giá trị hàm mục tiêu 1 mà nhỏ thì giá trị hàm mục tiêu 2 lại lớn lên và ngược lại. Đặc tính mẫu thuẫn lẫn nhau giữa 2 hàm mục tiêu khẳng định việc xây dựng bài toán tối ưu đa mục tiêu được trình bày trong nghiên cứu này là cần thiết nhằm cung cấp cho người thiết kế nhiều lựa chọn hơn. Để minh họa rõ hơn cho nhận xét trên, Bảng 2 trình bày 3 nghiệm tối ưu điển hình tương ứng với 3 trường hợp là: (1) giá trị hàm mục tiêu F_1 nhỏ nhất, (2) giá trị hàm mục tiêu F_2 nhỏ nhất và cân bằng các giá trị của 2 hàm mục tiêu. Giá trị nhỏ nhất của F_1 tìm được là 4958.25 (kg) tương ứng với giá trị lớn nhất của hàm F_2 trong tập nghiệm Pareto là 13.37 (mm). Giá trị nhỏ nhất của F_2 tìm được là 0.85 (mm) tương ứng với F_1 lớn nhất và bằng 26937.4 (kg).



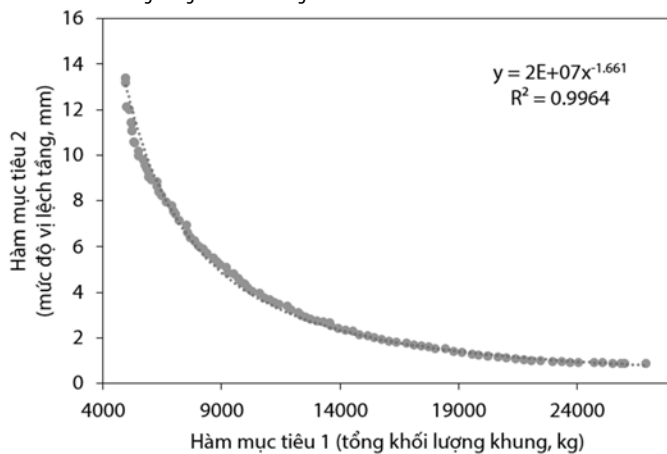
Hình 2. Sơ đồ khung thép 2 tầng



Hình 3. Đường cong Pareto của quần thể ban đầu



Hình 4. Đường cong Pareto ở vòng tiến hóa thứ 10



Hình 5. Tập nghiệm Pareto cuối cùng

Bảng 1. Một số phương án tối ưu

	F ₁ nhỏ nhất	F ₂ nhỏ nhất	Cân bằng F ₁ và F ₂
Hàm mục tiêu 1 (Khối lượng khung) (kg)	4958.25	26937.4	10009.4
Hàm mục tiêu 2 (Mức độ lệch tầng) (mm)	13.37	0.85	4.36
Nhóm 1	W10x54	W12x65	W12x65
Nhóm 2	W16x100	W14x808	W14x311
Nhóm 3	W16x40	W12x65	W16x77
Nhóm 4	W14x53	W14x808	W16x100
Nhóm 5	W27x84	W40x278	W36x150
Nhóm 6	W12x16	W16x36	W12x19
Nhóm 7	W18x46	W40x183	W24x94
Nhóm 8	W12x22	W12x22	W12x22

5. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, tác giả đã xây dựng bài toán tối ưu đa mục tiêu cho khung thép sử dụng phân tích trực tiếp. Hai hàm mục tiêu được xem xét là tổng khối lượng và chuyển vị lệch tầng của công trình. Các biến thiết kế là tiết diện của dầm

và cột được lựa chọn từ tập tiết diện W cho trước lấy theo tiêu chuẩn AISC-LRFD. Điều kiện ràng buộc bao gồm khả năng xây dựng, khả năng chịu tải và chuyển vị lệch tầng xác định theo các tổ hợp tải trọng quy định trong tiêu chuẩn thiết kế. Thuật toán NSGA-II được sử dụng để giải bài toán tối ưu đa mục tiêu được đặt ra. Kết quả tính toán khung thép không gian 2 tầng cho thấy việc xét tối ưu đa mục tiêu cho khung thép là cần thiết khi 2 hàm mục tiêu mâu thuẫn với nhau. Kết quả tối ưu cũng cho thấy thuật toán NSGA-II rất hiệu quả khi giải bài toán tối ưu 2 mục tiêu của khung thép sử dụng phân tích trực tiếp. Trong nghiên cứu tiếp theo, tác giả sẽ xem xét hiệu quả của các thuật toán tối ưu đa mục tiêu khác, đồng thời mở rộng bài toán tối ưu đặt ra cho trường hợp nhiều hàm mục tiêu hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] V.H. Truong, S.E. Kim. Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm. *Advances in Engineering Software* 2018; 121: 59-74.
- [2] T.S. Cao, T.T.T. Nguyen, V.S. Nguyen, V.H. Truong, H.H. Nguyen. Performance of Six Metaheuristic Algorithms for Multi-Objective Optimization of Nonlinear Inelastic Steel Trusses. *Buildings* 2023; 13 (4), 868.
- [3] V.H. Truong, H.A. Pham. Support vector machine for regression of ultimate strength of trusses: A comparative study. *Engineering Journal* 2021; 25 (7), 157-166.
- [4] Q.A. Vu, T.S. Cao, H.H. Nguyen, V.H. Truong, M.H. Ha. An efficient differential evolution-based method for optimization of steel frame structures using direct analysis. *Structures* 2023; 51, 67-78.
- [5] V.H. Truong, H.A. Pham, T.H. Van, S. Tangaramvong. Evaluation of machine learning models for load-carrying capacity assessment of semi-rigid steel structures. *Engineering Structures* 2022; 273, 115001.
- [6] H.A. Pham, V.H. Truong. A robust method for load-carrying capacity assessment of semirigid steel frames considering fuzzy parameters. *Applied Soft Computing* 2022; 124, 109095.
- [7] V.H. Truong, H.M. Hung, P.H. Anh, T.D. Hoc. Optimization of steel moment frames with panel-zone design using an adaptive differential evolution. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-HUCE* 2020; 14(2): 65-75.
- [8] H.A. Pham, D.X. Nguyen, V.H. Truong. An efficient differential-evolution-based moving compensation optimization approach for controlling differential column shortening in tall buildings. *Expert Systems with Applications* 2021; 169, 114531.
- [9] H.A. Pham, V.H. Truong, T.C. Vu. Fuzzy finite element analysis for free vibration response of functionally graded semi-rigid frame structures. *Applied Mathematical Modelling* 2020; 88: 852-869.
- [10] H.A. Pham, V.H. Truong, M.T. Tran. Fuzzy static finite element analysis for functionally graded structures with semi-rigid connections. *Structures* 2020; 26: 639-650.
- [11] T. Vo-Duy, D. Duong-Gia, V. Ho-Huu and T. Nguyen-Thoi. An Effective Couple Method for Reliability-Based Multi-Objective Optimization of Truss Structures with Static and Dynamic Constraints. *International Journal of Computational Methods* 2020; 17(06): 1950016.
- [12] H. F. Eid, L. Garcia-Hernandez, A.h Abraham. Spiral water cycle algorithm for solving multi-objective optimization and truss optimization problems. *Engineering with Computers* 2022; 38: 963-973.
- [13] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II, *IEEE Trans. Evol. Computation* 2002; 6(2):182-197.