

Phân tích ứng xử của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp dựa trên áp đặt các hàm dạng cho điều kiện biên khác nhau

Analysis of functionally graded sandwich plates based on imposition of the shape functions for various boundary conditions

> TS NGUYỄN VĂN HẬU

GV Khoa Xây dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM
Email: haunv@hcmute.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích tần số dao động riêng và ổn định của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp. Đây là lý thuyết tính toán phát triển từ lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và không cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Phương trình cân bằng của tấm được thiết lập theo nguyên lý Hamilton. Lời giải Ritz được áp dụng cho kết cấu tấm với các điều kiện biên khác nhau và tính chính xác của mô hình phân tích được đánh giá và so sánh với các lời giải trước đó. Kết quả số trong phân tích tấm phân lớp chức năng nhiều lớp dùng để đánh giá ổn định tới hạn và tần số dao động riêng của tấm do hiệu ứng thay đổi đặc trưng vật liệu, cấu trúc, tỉ số cạnh trên chiều dày của tấm.

Từ khóa: Tấm phân lớp chức năng nhiều lớp; dao động tự do; phân tích ổn định.

ABSTRACT

This paper presents a higher-order shear deformation theory for buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates. The theory used is developed from the first-order shear deformation theory without requiring shear correction factor. The plate's equations of motion are derived from the Hamilton's principle. Ritz's solutions are applied to solve for the plate's responses in various boundary conditions. The accuracy of this plate model is verified with the past studies. Numerical results are obtained for functionally graded sandwich plates to investigate the effects of the power-law index, constituent material distribution, side-to-thickness on the buckling and frequency responses.

Keywords: Functionally graded sandwich plates, free vibration, buckling analysis

1. GIỚI THIỆU

Vật liệu phân lớp chức năng (*Functionally Graded Material* (FGM)) là loại vật liệu composite đặc biệt có các đặc trưng cơ lý thay đổi liên tục theo yêu cầu mong muốn [1]. Chính vì vậy, chúng được sử dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như: Xây dựng, cơ khí, hàng không vũ trụ, ô tô, tàu thủy... Do yêu cầu ứng dụng FGM trong kỹ thuật ngày càng tăng nên đòi hỏi phải có nhiều nghiên cứu, nhất là các mô hình lý thuyết tính toán cho các phân tích ứng xử của loại vật liệu này. Có rất nhiều nghiên cứu về FGM đã được các nhà khoa học phát triển, trong đó phân tích ứng xử tấm phân lớp chức năng nhiều lớp theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao là một trong những lý thuyết phân tích hiệu quả cho kết cấu loại này. Một số lý thuyết tính toán khác như: lý thuyết cổ điển (CPT) ([2]) bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) ([3-5]) có kể đến thành phần biến dạng cắt nhưng cần hệ số hiệu chỉnh cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) ([6-10]) không cần hệ số hiệu chỉnh cắt và mặt biến dạng theo chiều dày tấm

có dạng mặt cong, điều này rất phù hợp với ứng xử thực tế của kết cấu tấm.

Mục tiêu của nghiên cứu này là phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích ổn định tới hạn và tần số dao động tự do của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau nhằm đa dạng hóa các lời giải cho bài toán tấm. Trường chuyển vị của tấm được xấp xỉ dựa trên các thành phần chuyển vị chưa biết tại mặt trung bình, trong đó hàm số biến dạng cắt và hàm số áp đặt điều kiện biên được lựa chọn đóng vai trò quan trọng trong phân tích kết quả bài toán. Lời giải giải tích được sử dụng để phân tích ổn định và tần số dao động tự do cho tấm hình chữ nhật có các điều kiện biên khác nhau. Các ví dụ số được áp dụng để kiểm chứng mức độ chính xác của nghiên cứu bài báo so với các kết quả đã được công bố.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Xét tấm hình chữ nhật như Hình 1 có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b , chiều cao là h được chế tạo từ gốm và kim loại với các đặc

trung hữu hiệu thay đổi theo chiều dày tấm theo quy luật hàm mật độ thể tích.

Các đặc trưng hữu hiệu được xác định:

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c^{(j)}(z) + P_m \quad (1)$$

Trong đó P_c và P_m là mô đun đàn hồi Young (E), hệ số Poisson (ν) của thành phần gốm (ceramic) và kim loại (metal) tại mặt trên và mặt dưới của tấm. Hàm mật độ gốm ($V_c^{(j)}(z)$) được xác định theo quy luật:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2)$$

Với p là hệ số đặc trưng vật liệu. Sự phân bố vật liệu của $V_c^{(j)}(z)$ theo chiều dày tấm được thể hiện như Hình 2.

2.1. Trường chuyển vị và biến dạng

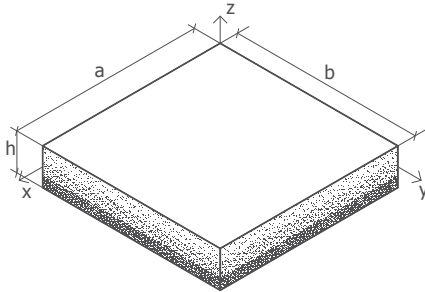
Trường chuyển vị của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

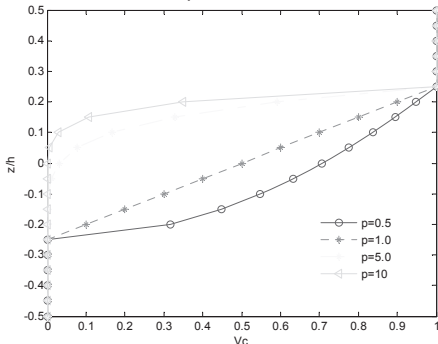
Trong đó $f(z)$ là hàm số biến dạng cắt ([11]):

$$f(z) = h \arctan\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)} \quad (4)$$

u, v, w, θ_x và θ_y là các thành phần chuyển vị tại mặt trung bình của tấm; r là hệ số hiệu chỉnh, lấy $r = 1$.



Hình 1. Mô hình tấm FGM nhiều lớp.



Hình 2. Sự phân bố vật liệu theo chiều dày tấm.

Trường biến dạng của tấm được xác định:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + f\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (5a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = g\boldsymbol{\gamma}^{(0)} \quad (5b)$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (6a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6b)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6c)$$

2.2. Phương trình năng lượng

Nguyên lý biến phân Hamilton của một hệ được xác định:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (7)$$

Trong đó $\delta U, \delta V$ và δK là biến phân năng lượng biến dạng, biến phân thế năng và biến phân động năng của tấm. Thành phần biến phân năng lượng biến dạng được xác định:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} \\ &+ \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \\ &= \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right. \\ &- M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + P_{yy} \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + R_{zz} \delta \theta_z + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \\ &- 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + P_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) \\ &\left. + Q_x \left(\delta \theta_x + \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial x} \right) + Q_y \left(\delta \theta_y + \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} \right) \right] dA \end{aligned} \quad (8)$$

Trong đó $dA = dx dy$; N, M, R và Q là các thành phần nội lực trong tấm:

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}) dz \quad (9a)$$

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} z (\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}) dz \quad (9b)$$

$$(R_{xx}, R_{yy}, R_{xy}) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} f(\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}) dz \quad (9c)$$

$$(Q_x, Q_y) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} g(\sigma_{xz}^{(j)}, \sigma_{yz}^{(j)}) dz \quad (9d)$$

Thành phần biến phân thế năng:

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta w dA \quad (10)$$

Trong đó \bar{N} là thành phần lực nằm trong mặt phẳng của tấm

$$\bar{N} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11)$$

Thành phần biến phân động năng:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) \rho^{(j)}(z) dV \\ &= \int_A \left[I_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) - I_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u} \right. \right. \\ &+ \left. \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v} \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) \\ &+ J_1 (\dot{u} \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_x \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y \delta \dot{v}) - J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{\theta}_x \right. \\ &+ \left. \dot{\theta}_x \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) + K_2 (\dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x \\ &+ \left. \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y \right)] dA \end{aligned} \quad (12)$$

Trong đó (\cdot) là đạo hàm các thành phần chuyển động theo thời gian t , $\rho^{(j)}(z)$ là khối lượng riêng và $I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2$ là các thành phần quán tính của tấm:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (1, z, z^2) \rho^{(j)}(z) dz \quad (13a)$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (f, zf, f^2) \rho^{(j)}(z) dz \quad (13b)$$

Thay thế $\delta U, \delta V$ và δK từ (8), (10) và (12) vào (7). Phương trình cân bằng của hệ được xác định:

$$\delta u : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + J_1 \ddot{\theta}_x \quad (14a)$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + J_1 \ddot{\theta}_y \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \delta w : & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \bar{N} = I_0 \ddot{w} \\ & + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w} + J_2 \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14c)$$

$$\delta \theta_x : \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Q_x = J_1 \ddot{u} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + K_2 \ddot{\theta}_x \quad (14d)$$

$$\delta \theta_y : \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - Q_y = J_1 \ddot{v} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + K_2 \ddot{\theta}_y \quad (14e)$$

Trong đó $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ là toán tử Laplacian.

Phương trình ứng xử của tấm:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(j)} \\ \sigma_{yy}^{(j)} \\ \sigma_{xy}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(j)} & C_{12}^{(j)} & 0 \\ C_{12}^{(j)} & C_{22}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(j)} \\ \epsilon_{yy}^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (15a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^{(j)} \\ \sigma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55}^{(j)} & 0 \\ 0 & C_{44}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (15b)$$

Trong đó

$$C_{11}^{(j)} = C_{22}^{(j)} = \frac{E^{(j)}(z)}{1 - \nu^{(j)}(z)^2} \quad (16a)$$

$$C_{12}^{(j)} = \nu^{(j)}(z) C_{11}^{(j)} \quad (16b)$$

$$C_{44}^{(j)} = C_{55}^{(j)} = C_{66}^{(j)} = \frac{E^{(j)}(z)}{2[1 + \nu^{(j)}(z)]} \quad (16c)$$

Thay thế (6a) và (6b) vào (15a) và kết hợp với (9a), (9b), (9c) thu được mối quan hệ giữa lực và biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{D}^s \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s & \mathbf{H}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^{(0)} \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Trong đó $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s, \mathbf{H}^s$ là các thành phần độ cứng của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp được xác định:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s, \mathbf{H}^s) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (1, z, z^2, f, zf, f^2) \mathbf{C}^{(j)}(z) dz \quad (18)$$

Thành phần lực cắt được xác định bằng cách sử dụng các phương trình (6c), (15b) và (9d):

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Trong đó A_{44}^s, A_{55}^s là các thành phần độ cứng cắt của tấm:

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} g^2 C_{44}^{(j)}(z) dz = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} g^2 C_{55}^{(j)}(z) dz \quad (20)$$

Thay thế (15) và (17) vào (12) thu được hệ phương trình để giải cho bài toán tấm.

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{11}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \\ & + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + J_1 \ddot{\theta}_x \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
& - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \\
& + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + J_1 \ddot{\theta}_y
\end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\
& + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
& - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11}^s \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + D_{22}^s \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} \\
& + (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \bar{N} \\
& = I_0 \dot{w} + I_1 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \dot{w} + J_2 \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad (21c)$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{66}^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + H_{11}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\
& + (H_{12}^s + H_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + H_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - A_{55}^s \theta_x \\
& = J_1 \ddot{u} - J_2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + K_2 \ddot{\theta}_x
\end{aligned} \quad (21d)$$

$$\begin{aligned}
& B_{22}^s \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{66}^s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& - D_{22}^s \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + H_{22}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \\
& + (H_{12}^s + H_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + H_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - A_{44}^s \theta_y \\
& = J_1 \ddot{v} - J_2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + K_2 \ddot{\theta}_y
\end{aligned} \quad (21e)$$

3. LỜI GIẢI GIẢI TÍCH

Lời giải tám phân lớp chức năng nhiều lớp có các điều kiện biên khác nhau với các thành phần chuyển vị được xấp xỉ dưới dạng:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} X'(x) Y(y) e^{i\omega t} \quad (22a)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} X(x) Y'(y) e^{i\omega t} \quad (22b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} X(x) Y(y) e^{i\omega t} \quad (22c)$$

$$\theta_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} X'(x) Y(y) e^{i\omega t} \quad (22d)$$

$$\theta_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} X(x) Y'(y) e^{i\omega t} \quad (22e)$$

Trong đó $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ là các đại lượng cần xác định; ω là tần số dao động riêng; $i^2 = -1$. Hàm dạng $X(x), Y(y)$ được chọn để áp đặt các điều kiện biên của tám phân lớp chức năng nhiều lớp [12].

Trường hợp bốn biên tựa đơn (SSSS):

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (23a)$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (23b)$$

Trường hợp bốn biên ngàm (CCCC):

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{3a}} \left[\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) - 1 \right] \quad (24a)$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{3a}} \left[\cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) - 1 \right] \quad (24b)$$

Thay thế trường chuyển vị được chọn vào các phương trình cân bằng thu được phương trình dạng rút gọn:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (25)$$

Trong đó

$$k_{11} = A_{11} e_{12} + A_{33} e_8, k_{12} = (A_{12} + A_{33}) e_8$$

$$k_{13} = -B_{11} e_{12} - (B_{12} + 2B_{33}) e_8$$

$$k_{14} = B_{11}^s e_{12} + B_{33}^s e_8, k_{15} = (B_{12}^s + B_{33}^s) e_8$$

$$k_{22} = A_{33} e_{10} + A_{22} e_4, k_{23} = -[B_{22} e_4 + (B_{12} + 2B_{33}) e_{10}]$$

$$k_{24} = (B_{12}^s + B_{33}^s) e_{10}, k_{25} = B_{33}^s e_{10} + B_{22}^s e_4$$

$$k_{31} = B_{11} e_{13} + (B_{12} + 2B_{33}) e_{11}, k_{32} = B_{22} e_5 + (B_{12} + 2B_{33}) e_{11}$$

$$k_{33} = -D_{11} e_{13} - D_{22} e_5 - 2(D_{12} + 2D_{33}) e_{11} - N_0 (e_3 + \eta e_9)$$

$$k_{34} = D_{11}^s e_{13} + (D_{12}^s + 2D_{33}^s) e_{11}, k_{35} = D_{22}^s e_5 + (D_{12}^s + 2D_{33}^s) e_{11}$$

$$k_{41} = B_{11}^s e_{12} + B_{33}^s e_8, k_{42} = (B_{12}^s + B_{33}^s) e_8$$

$$k_{43} = -D_{11}^s e_{12} - (D_{12}^s + 2D_{33}^s) e_8, k_{44} = H_{11}^s e_{12} + H_{33}^s e_8 - A_{44}^s e_6$$

$$k_{45} = (H_{12}^s + H_{33}^s) e_8, k_{51} = (B_{12}^s + B_{33}^s) e_{10}$$

$$k_{52} = B_{33}^s e_{10} + B_{22}^s e_4, k_{53} = -D_{22}^s e_4 - (D_{12}^s + 2D_{33}^s) e_{10}$$

$$k_{54} = (H_{12}^s + H_{33}^s) e_{10}, k_{55} = H_{33}^s e_{10} + H_{22}^s e_4 - A_{55}^s e_2$$

$$m_{11} = -I_0 e_6, m_{13} = I_1 e_6, m_{14} = -J_1 e_6, m_{22} = -I_0 e_2$$

$$m_{23} = I_1 e_2, m_{25} = -J_1 e_2, m_{31} = -I_1 e_9, m_{32} = -I_1 e_3$$

$$m_{33} = -I_0 e_1 + (e_3 + e_9) I_2, m_{34} = -J_2 e_9, m_{35} = -J_2 e_3$$

$$m_{41} = -J_1 e_6, m_{43} = J_2 e_6, m_{44} = -K_2 e_6, m_{52} = -J_1 e_2$$

$$m_{53} = J_2 e_2, m_{55} = -K_2 e_2$$

$$e_1 = \int_0^b \int_0^a X_m Y_n X_m Y_n dx dy, e_2 = \int_0^b \int_0^a X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy$$

$$e_3 = \int_0^b \int_0^a X_m Y_n'' X_m Y_n'' dx dy, e_4 = \int_0^b \int_0^a X_m Y_n''' X_m Y_n''' dx dy$$

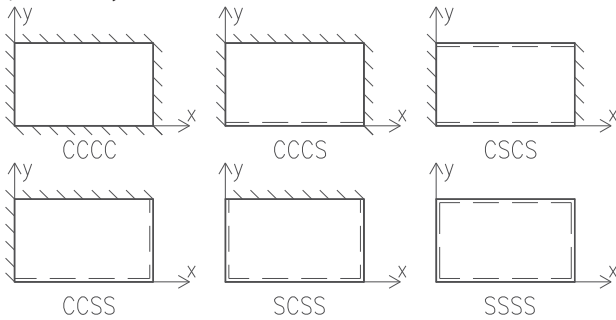
$$e_5 = \int_0^b \int_0^a X_m Y_n'''' X_m Y_n dx dy, e_6 = \int_0^b \int_0^a X_m' Y_n X_m' Y_n dx dy$$

$$e_8 = \int_0^b \int_0^a X_m' Y_n X_m' Y_n dx dy, e_9 = \int_0^b \int_0^a X_m'' Y_n X_m Y_n dx dy$$

$$e_{10} = \int_0^b \int_0^a X_m'' Y_n X_m Y_n dx dy, e_{11} = \int_0^b \int_0^a X_m'' Y_n X_m Y_n dx dy$$

$$e_{12} = \int_0^b \int_0^a X_m''' Y_n X_m Y_n dx dy, e_{13} = \int_0^b \int_0^a X_m''' Y_n X_m Y_n dx dy$$

Các trường hợp liên kết của tấm được xét đến trong bài báo được trình bày như Hình 3.



Hình 3. Các trường hợp liên kết của tấm

4. KẾT QUẢ SỐ

Trong phần này, một số ví dụ được khảo sát để phân tích ổn định tới hạn và tần số dao động riêng của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau có kích thước hình chữ nhật. Tấm được chế tạo từ vật liệu gốm và kim loại như Hình 1, với các đặc trưng vật liệu: mặt dưới là nhôm (Al): $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0.3$, $\rho_m = 2707$ kg/m³, mặt trên là gốm (Al₂O₃): $E_c = 380$ GPa, $\nu_c = 0.3$, $\rho_c = 3800$ kg/m³. Các hiệu ứng về đặc trưng vật liệu, tỉ số cạnh trên chiều dày và các trường hợp liên kết của tấm ảnh hưởng đến tần số dao động riêng và ổn định tới hạn của tấm được khảo sát một cách chi tiết. Đại lượng không thứ nguyên dùng để phân tích kết quả:

$$\omega_1 = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_0 / E_0} \tag{26}$$

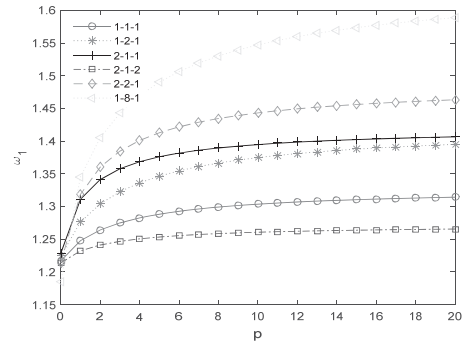
$$N_{cr1} = \frac{N_{cr} a^2}{100 E_0 h^3}$$

Trong đó $E_0 = 1$ GPa, $\rho_0 = 1$ kg/m³

Bảng 1 trình bày giá trị tần số dao động riêng của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp (cấu trúc 1-8-1: $h_0 = -h/2, h_1 = -4h/10, h_2 = 4h/10, h_3 = h/2$) trường hợp bốn biên tựa đơn và liên kết ngàm được khảo sát với sự thay đổi giá trị đặc trưng vật liệu và tỉ số chiều dày trên cạnh của tấm. Các kết quả tính toán được so sánh với nghiên cứu của Q. Li và cộng sự [13] sử dụng lý thuyết ba chiều. Từ bảng kết quả cho thấy có sự sai số rất nhỏ của nghiên cứu bài báo so với nghiên cứu này, điều đó khẳng định chính xác kết quả nghiên cứu bài báo.

Hình 4 trình bày hiệu ứng của đặc trưng vật liệu và với các cấu trúc khác nhau của tấm vuông trong trường hợp tỉ số cạnh trên chiều dày là $a/h = 10$. Từ hình vẽ cho thấy tần số dao động riêng phụ thuộc vào sự sắp xếp vật liệu theo chiều dày tấm, điều này là phù hợp với ứng xử của kết cấu do thay đổi độ cứng trong tấm. Giá

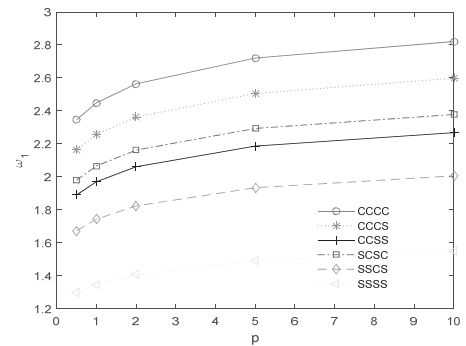
trị tần số dao động riêng trong tấm đạt giá trị lớn nhất khi phân bố vật liệu theo cấu trúc là 1-8-1 và bé nhất ứng với cấu trúc 2-1-2: $h_0 = -h/2, h_1 = -h/10, h_2 = h/10, h_3 = h/2$.



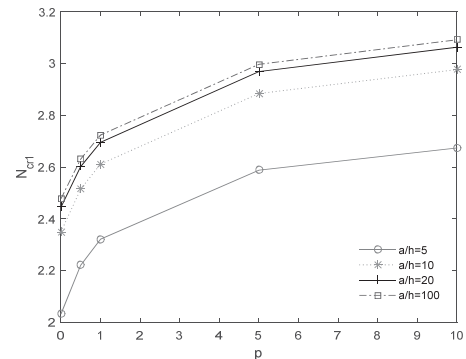
Hình 4. Giá trị tần số dao động riêng ω_1 cho tấm hình vuông tựa đơn trường hợp cấu trúc vật liệu thay đổi $a/h = 10$

Hình 5 trình bày hiệu ứng của đặc trưng vật liệu và các điều kiện biên khác nhau của tấm vuông trường hợp tỉ số cạnh trên chiều dày $a/h = 10$. Từ hình vẽ cho thấy giá trị tần số dao động riêng phụ thuộc vào các điều kiện liên kết của tấm, tấm có liên kết bốn biên ngàm cho giá trị tần số dao động riêng lớn nhất trong khi tấm có bốn biên tựa đơn thì có kết quả ngược lại, điều này là hoàn toàn phù hợp với ứng xử thông thường của kết cấu khi phân tích tần số dao động tự do.

Tương tự, Hình 6 cũng trình bày hiệu ứng đặc trưng vật liệu và tỉ lệ cạnh trên chiều dày của tấm thay đổi cho trường hợp tấm vuông có bố biên tựa đơn. Từ hình vẽ cho thấy tỉ lệ cạnh trên chiều dày của tấm có ảnh hưởng đến giá trị lực nén ổn định tới hạn trong tấm.



Hình 5. Giá trị tần số dao động riêng ω_1 cho tấm (cấu trúc 1-8-1) hình vuông trường hợp các điều kiện biên khác nhau $a/h = 10$



Hình 6. Giá trị lực nén tới hạn N_{cr1} cho tấm (cấu trúc 1-1-1) hình vuông tựa đơn trường hợp cạnh trên chiều dày tấm thay đổi $\eta = 1$

Bảng 1. Giá trị tần số dao động riêng (ω_1) của tấm hình vuông (cấu trúc 1-8-1) tựa đơn và liên kết ngàm bốn biên

Điều kiện biên	Tham khảo	h/a	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
SSSS	Bài báo	0.01	1.33990	1.38666	1.44488	1.53138	1.59098
	Q. Li và cộng sự (3D) [13]		1.33931	1.38669	1.44491	1.53143	1.59105
	Bài báo	0.1	1.29512	1.34525	1.40498	1.49013	1.54714
	Q. Li và cộng sự (3D) [13]		1.29751	1.34847	1.40828	1.49309	1.54980
	Bài báo	0.2	1.18677	1.24288	1.30494	1.38619	1.43703
	Q. Li và cộng sự (3D) [13]		1.19580	1.25338	1.31569	1.39567	1.44540
CCCC	Bài báo	0.01	2.50374	2.59158	2.70049	2.86219	2.97352
	Q. Li và cộng sự (3D) [13]		2.45438	2.54149	2.64835	2.80692	2.91611
	Bài báo	0.1	2.31386	2.41687	2.53180	2.68584	2.78449
	Q. Li và cộng sự (3D) [13]		2.24154	2.34606	2.45973	2.60760	2.70070
	Bài báo	0.2	1.94337	2.06196	2.18021	2.31571	2.39084
	Q. Li và cộng sự (3D) [13]		1.86081	1.97993	2.09554	2.22142	2.28896

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày phân tích ổn định và dao động tự do của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau. Phương trình cân bằng năng lượng được xây dựng từ các thành phần chuyển động của tấm. Lời giải Ritz được sử dụng cho bài toán tấm có kích thước hình chữ nhật với các điều kiện biên khác nhau giúp cho việc phân tích ứng xử kết cấu tấm được phong phú hơn theo phương pháp giải tích. Kết quả nghiên cứu của bài báo phù hợp với các nghiên cứu trước đây, điều đó chứng tỏ tính chính xác của nghiên cứu này. Các đánh giá hiệu ứng về thay đổi tỉ lệ kích thước cạnh trên chiều dày, cấu trúc cũng như quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày tấm được khảo sát và phân tích một cách chi tiết. Mô hình nghiên cứu của bài báo là phù hợp và có giá trị cho phân tích ổn định tới hạn và tần số dao động riêng của tấm phân lớp chức năng nhiều lớp.

Acknowledgement: This work belongs to the project in 2021 funded by Ho Chi Minh City University of Technology and Education, Vietnam.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Koizumi, M. *FGM Activities in Japan*, Composites Part B: Engineering, 28(1-4), 1997.
2. Abrate, S. *Functionally graded plates behave like homogeneous plates*, Composites Part B: Engineering, 39(151-158), 2008.
3. Singha, M., Prakash, T. and Ganapathi, M. *Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load*, Finite Elements in Analysis and Design, 47(453-460), 2011.
4. Nguyen, T. K., Sab, K. and Bonnet, G., *First-order shear deformation plate models for functionally graded materials*, Composite Structures, 83(25-36), 2008.
5. Thai, H. T. and Vo, T. P. *A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates*, Applied Mathematical Modelling, 37(3269-3281), 2013.
6. Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M., Qian, L. F. and Martins, P. A. L. S. *Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method*, Composite Structures, 69(449-457), 2005.
7. Reddy, J. N. *A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates*, International Journal of Aerospace and Lightweight Structures, 1(1-21), 2011.
8. Mantari, J. L., Oktem, J. L. A. S. and Soares, O. G. *Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory*, Composite Structures, 94(714-723), 2012.

9. Talha, M. and Singh, B. N. *Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory*, Applied Mathematical Modelling, 34(3991-4011), 2010.

10. Mantari, J. L. and Soares, C. G. *Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory*, Composite Structure, 94(1991-2000), 2012.

11. Nguyen, V. H., Nguyen, T. K., Thai H. T. and Vo, T. P. *A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates*, Composites Part B: Engineering, 66(233-246), 2014.

12. Pirmoradian, M., Torkan, E., Abdali, N., Hashemian, M. and Toghraie, D. *Thermo-mechanical stability of single-layered graphene sheets embedded in an elastic medium under action of a moving nanoparticle*, Mechanics of Materials, 141(102248), 2020.

13. Li, Q., Lu, V. P. and Kou, K. P. *Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates*, Journal of Sound and Vibration, 311(498-515), 2008.